

أطلب مجاناً مع هذا الكتاب الجزء الخاص بامتحانات المراجعة

٢٠١٧

للرياضيات البهجة
التفاضل والتكامل

الكتاب ٣ ثانوي

شرح موجز للتمارين والقوانين
مسائل امتحانات بحلول كامله
تمارين واختبارات الكتاب المدرسي بحلول كامله

صلاح سوريان

والله اعلم

الامتحان

للمسائل والامتحانات

في الرياضيات البحتة

التفاضل والتكامل

للمصف الثالث الثانوي

طبقاً لأحدث مناهج وزارة التربية والتعليم لعام ٢٠١٧

- تمارين ومسائل شاملة ومتدرجة على كل درس
- مسائل امتحانات الثانوية العامة خلال ثمانون عاماً
- مسائل مبتكرة لتنمية المهارات الذهنية
- جميع التمارين والمسائل مطابقة لأحدث المناهج التي أقرتها الوزارة
- ملحق خاص لامتحانات الثانوية العامة بدورياً
- جميع المسائل والامتحانات محلولة حلاً كاملاً

إعداد

الأستاذ/ صلاح سوريال

الأستاذ/ ولنجتون عطية

حقوق الطبع محفوظة للمؤلف

مقدمة

الزملاء الأعزاء و أبنائي الطلاب و الطالبات

شكراً لله وحمداً على ما وهبنا من فضله لإخراج سلسلة لامي في (الرياضيات المطورة) ومنها هذا الكتاب، وهو يتميز بوسائل تعليمية خاصة، ينفرد بها دون أي كتاب آخر وهي إحتواء الكتاب على مايلي:

■ عدد هائل من المسائل التي تغطي جميع الأفكار الخاصة بكل درس، وهذه المسائل متدرجة من الأسهل إلى الأقوى وكل مسألة مذيلة بالإجابة النهائية، بالإضافة إلى الحل الكامل لها في نهاية كل فرع.

■ جميع المسائل الواردة في امتحانات شهادة الثانوية العامة في السنوات السابقة لتدريب الطالب على إكتساب مهارة حل مسائل الإمتحانات المتوقعة من بداية العام الدراسي.

■ مسائل متميزة في نهاية كل باب.

■ عدد كاف من الإمتحانات الكاملة الحديثة في كل فرع لتدريب الطالب عليها في المراجعة النهائية لإكتساب الثقة والتخلص من رهبة الإمتحانات والحصول على الدرجات النهائية.

تمنياتنا لجميع طلاب وطالبات الثانوية العامة في جميع أنحاء الجمهورية بتحقيق التفوق والمستقبل الزاهر.

وفقكم الله وإيانا في خدمة العلم والتعليم في بلدنا العزيز.

المؤلف

الوحدة الأولى:

الاشتقاق وتطبيقاته

- ١- اشتقاق الدوال المثلثية
- ٢- الاشتقاق الضمني والبارامتري
- ٣- المشتقات العليا للدالة
- ٤- معادلتى المماس والعمودي لمنحنى
- ٥- المعدلات الزمنية المرتبطة

تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

٠ اختبارات لامي

الاشتقاق وتطبيقاته

مشتقات مقلوبات الدوال المثبتة :

الدالة : ص = د (س)	مشتقتها : $\frac{وص}{وس} = \frac{ص}{د} = د' (س)$
قاس	قاس ظا س
قتا س	- قتا س ظتا س
ظتا س	- قتا ^٢ س

➤ نتائج هامة :

الدالة : ص = د (س)	مشتقتها : $\frac{وص}{وس} = \frac{ص}{د} = د' (س)$
قاد (س)	قاد (س) ظاد (س) . د' (س)
قتاد (س)	- قتا س ظتا س . د' (س)
❖ ظتا د (س)	❖ - قتا ^٢ س . د' (س)

➤ تذكر أن :

الدالة : ص = د (س)	مشتقتها : $\frac{وص}{وس} = \frac{ص}{د} = د' (س)$
٢ = ثابت \exists ح	صفر
٢ س	٢
س ^٢ (\exists ح)	٢ س - ١
ص = د (ع) ، د = ع (س)	$\frac{وص}{وس} \times \frac{وع}{وع} = \frac{وص}{وس}$
ص ^٢	٢ ص - ١ $\times \frac{وص}{وس}$
جاس	جتا س
جتا س	- جاس
ظا س	قا ^٢ س

الدالة الضمنية - الاشتقاق الضمني:

- إذا كانت قاعدة الدالة على الصورة : $ص = د (س)$ فإننا نقول إنها دالة صريحة
- وإذا كانت قاعدة الدالة على الصورة : $د (س، ص) = ٠$ فإننا نقول إنها دالة ضمنية ويكون الاشتقاق في هذه الحالة اشتقاقا ضمنيا

المشتقات العليا للدالة:

- (١) بفرض أن $ص = د (س)$ قابلة للاشتقاق
فإن المشتقة الأولى لها يرمز لها بأحد الرموز : $\frac{دص}{دس}$ ، $ص'$ ، $د'$ (س)
- (٢) بفرض أن المشتقة الأولى للدالة قابلة للاشتقاق
فإن المشتقة الثانية لها يرمز لها بأحد الرموز : $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ ، $ص''$ ، $د''$ (س)
- (٣) كذلك نرمز للمشتقة الثالثة (إن وجدت) بأحد الرموز : $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ ، $ص'''$ ، $د'''$ (س) ونرمز للمشتقة النونية بالرمز $\frac{د^٧ص}{دس^٧}$

■ تطبيقات الاشتقاق :

أولا : معادلتى المماس والعمودي للمنحنى :

- ميل المماس للمنحنى $ص = د (س)$ عند النقطة $(س_١، ص_١)$ الواقعة عليه هو : $\left(\frac{دص}{دس} \right) (س_١، ص_١) = د' (س_١) = م = ظاه$
- معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س_١، ص_١)$ الواقعة عليه هي : $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

■ معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة (س_١ ، ص_١) الواقعة عليه

$$\text{هي: } ص - ص_1 = - \frac{1}{م} (س - س_1)$$

➤ ملاحظات هامة :

■ إذا كان ميل المماس موجباً فإن الزاوية التي يصنعها الماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون حادة .

■ إذا كان ميل المماس سالباً فإن الزاوية التي يصنعها الماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون منفرجة .

■ إذا كان المماس [محور السينات فإن ميل المماس = صفر

■ إذا كان المماس [محور الصادات

فإن ميل المماس = غير معرف (أى يساوى كسر يكون مقامه = صفر)

■ إذا كان المماس [مستقيماً ما فإن ميل المماس = ميل هذا المستقيم

■ إذا كان المماس ⊥ مستقيماً ما فإن ميل المماس × ميل هذا المستقيم = - ١

■ ميل المستقيم المار بالنقطتين (س_١ ، ص_١) ، (س_٢ ، ص_٢) = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

■ ميل المستقيم الذى معادلته $س + ب ص + ج = ٠$ هو $م = - \frac{\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$

■ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع $ص = ٠$ فى معادلة المنحنى

■ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع $س = ٠$ فى معادلة المنحنى

■ لإيجاد نقط تقاطع منحنين أو منحنى مع مستقيم نحل معادلتيهما جبرياً

■ ظل قياس الزاوية بين مماسين لمنحنين : $\frac{١^2 - ٢^2}{٢^2 + ١^2}$ ظاهر

■ البعد بين نقطتين (س_١ ، ص_١) ، (س_٢ ، ص_٢) = $\sqrt{(ص_2 - ص_1)^2 + (س_2 - س_1)^2}$

ثانيا: المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كانت $v = d (s)$ وكانت s تتغير بتغير الزمن t فإن $\frac{ds}{dt}$ هو معدل تغير s بالنسبة

للزمن t ، $\frac{ds}{dt}$ هو معدل تغير s بالنسبة للزمن t .

ولحل هذا النوع من المسائل نتبع الخطوات التالية :

(١) نفرض المتغيرات برموز جبرية .

(٢) نكون علاقة رياضية تربط بين هذه المتغيرات .

(٣) نفاضل العلاقة الرياضية بالنسبة للزمن t .

(٤) نعوض بالمعطيات المعطاة بالمسألة .

➤ ملاحظات هامة :

(١) إذا تحركت نقطة في مستوى في مستوى الأحداثيات فإن :

$$(أ) \text{ سرعتها في اتجاه محور السينات } = \frac{dx}{dt}$$

$$(ب) \text{ سرعتها في اتجاه محور الصادات } = \frac{dy}{dt}$$

ونعطي إشارة (+) للمعدل الزمنى إذا كان يتزايد ، إشارة (-) إذا كان يتناقص

(٢) تذكر القوى الآتية :

❖ المثلث :

$$\text{مساحة سطح المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب طول أى ضلعين} \times \text{جيب الزاوية المحصورة بينهما}$$

، محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

حالة خاصة : المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه

$$ل : \text{مساحة سطحه} = \frac{1}{2} ل^2 \text{ جا } 60^\circ ، \text{ محيطه} = 3 ل$$

❖ متوازي الأضلاع :

مساحة سطح متوازي الأضلاع = القاعدة \times الارتفاع

= حاصل ضرب أى ضلعين \times جيب الزاوية المحصورة بينهما

، محيط متوازي الأضلاع = (الطول + العرض) $\times 2$

❖ المعين :

مساحة سطح المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين ، محيط المعين = $4 \times$ طول ضلعه

❖ المستطيل :

مساحة سطح المستطيل = الطول \times العرض ،

محيط المستطيل = (الطول + العرض) $\times 2$

❖ المربع :

مساحة سطح المربع = مربع طول ضلعه = $\frac{1}{4}$ مربع قطره ،

محيط المربع = $4 \times$ طول ضلعه ، طول ضلعه = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ طول ضلعه

❖ شبه المنحرف :

مساحة سطح شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيين \times الارتفاع ،

محيط شبه المنحرف = مجموع أطوال أضلاعه .

❖ الدائرة :

مساحة الدائرة = πr^2 ، محيط الدائرة = $2\pi r$

❖ القطاع الدائري :

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ ، $\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r^2 \times \theta$

❖ القطعة الدائرية :

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{\pi} \text{نوه}^2 (\text{هـ}^2 - \text{جـ}^2)$$

❖ المكعب :

$$\text{حجم المكعب} = \text{مكعب طول حرفه} ، \text{طول قطره} = \sqrt{3} \times \text{طول ضلعه}$$

$$، \text{مساحته الكلية} = 6 \times \text{مربع طول ضلعه}$$

❖ متوازي المستطيلات (الذي طوله س وعرضه ص وارتفاعه ع) :

$$\text{حجم متوازي المستطيلات} = \text{س} \times \text{ص} \times \text{ع} ، \text{مربع قطره} = \text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2$$

$$، \text{المساحة السطحية} = 2 (\text{س} \times \text{ص} + \text{ص} \times \text{ع} + \text{س} \times \text{ع})$$

❖ الاسطوانة (التي طول نصف قطر قاعدتها نوه وارتفاعها ع) :

$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi \text{نوه}^2 \text{ع}$$

$$، \text{المساحة الجانبية} = \pi \text{نوه} \text{ل} ، \text{المساحة السطحية} = \pi \text{نوه}^2 (2 + \frac{\text{ع}}{\text{نوه}})$$

❖ الكرة (التي طول نصف قطرها نوه) :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{نوه}^3 ، \text{المساحة السطحية} = 4 \pi \text{نوه}^2$$

❖ الهرم :

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{المساحة السطحية للهرم} = \text{مجموع مساحات أوجهه الأربعة}$$

تمارين على الوحدة الأولى

المجموعة الأولى:

➤ مسائل على مشتقات الدوال المثلثية ومقلوباتها .

أولاً : أكمل ما يـ . :

■ [١] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\frac{\cos}{\sin} = \dots\dots\dots$

■ [٢] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 - \sin) = \dots\dots\dots$

■ [٣] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 - \sin^2 = 3 + \frac{\cos}{\sin} = \dots\dots\dots$

■ [٤] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\frac{\cos}{\sin} = \dots\dots\dots$

■ [٥] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 + \sin) = \dots\dots\dots$

■ [٦] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 + \sin) = \dots\dots\dots$

■ [٧] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 + \sin) = \dots\dots\dots$

■ [٨] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 + \sin^2 = \dots\dots\dots$

■ [٩] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 + \sin) = \dots\dots\dots$

■ [١٠] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 - \sin) = \dots\dots\dots$

ثانياً : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [١١] إذا كان $\sin = \cos$ فإن $\cos^2 (1 - \sin) = \dots\dots\dots$

[١٠ س٤ قتا (٣ - س٢) ظلنا (٣ - س٢) ، قتا (٣ - س٢) ظلنا (٣ - س٢)]

- قتا (٣ - س٢) ظلنا (٣ - س٢) ، ١٠ س٤ قتا (٣ - س٢) ظلنا (٣ - س٢)]

■ [١٢] إذا كان ص = $\sqrt[3]{\text{قتاس}^3}$ فإن ص' =

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{\text{قتاس}^3}} , \frac{1}{\sqrt[3]{\text{قتاس}^3}} , \frac{3 \text{ س قتاس}^3 \text{ ظتاس}^3}{\sqrt[3]{\text{قتاس}^3}} , \frac{3 \text{ س قتاس}^3 \text{ ظتاس}^3}{\sqrt[3]{\text{قتاس}^3}} \right]$$

■ [١٣] إذا كان ص = (س^٤ - ظتاس^٣) فإن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$

$$[3 (س^4 - ظتاس^3) (س^3 - 3 س^2 ظتاس + 3 س ظتاس^2 - 3 ظتاس^3) , 3 (س^4 - ظتاس^3) (س^3 - 3 س^2 ظتاس + 3 س ظتاس^2 - 3 ظتاس^3)]$$

$$[3 (س^4 - ظتاس^3) (س^3 - 3 س^2 ظتاس + 3 س ظتاس^2 - 3 ظتاس^3) , 3 (س^4 - ظتاس^3) (س^3 - 3 س^2 ظتاس + 3 س ظتاس^2 - 3 ظتاس^3)]$$

■ [١٤] إذا كان ص = قتاس^٣ فإن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$

$$[3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 , 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 , 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 , 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3]$$

$$[3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 - 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 , 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 - 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 , 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 - 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 , 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3 - 3 س^2 قتاس^3 ظتاس^3]$$

■ [١٥] إذا كان ص = س قتاس فإن ص' =

$$[س قتاس ظتاس , س قتاس ظتاس , س قتاس ظتاس , س قتاس ظتاس]$$

$$[س قتاس + س قتاس ظتاس , س قتاس + س قتاس ظتاس , س قتاس + س قتاس ظتاس , س قتاس + س قتاس ظتاس]$$

■ [١٦] إذا كان ص = س قاس فإن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$

$$[س قاس ظاس , س قاس ظاس , س قاس ظاس , س قاس ظاس]$$

$$[س قاس + س قاس ظاس , س قاس + س قاس ظاس , س قاس + س قاس ظاس , س قاس + س قاس ظاس]$$

■ [١٧] إذا كان ص = $\frac{\text{جا}^3 \text{س}}{\text{قتاس}^3 \text{س}}$ فإن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$

$$[6 \text{ جا}^3 \text{س} , 3 \text{ جا}^3 \text{س} , 2 \text{ جا}^3 \text{س} , 2 \text{ جا}^3 \text{س}]$$

■ [١٨] إذا كان ص = $\frac{\text{جتاس}^3 \text{س}}{\text{قاس}^3 \text{س}}$ فإن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$

$$[3 \text{ جا}^3 \text{س} , 3 \text{ جا}^3 \text{س} , 3 \text{ جا}^3 \text{س} , 3 \text{ جا}^3 \text{س}]$$

■ [١٩] إذا كان ص = $\frac{\text{ظاس}}{\text{ظتاس}} + 1$ فإن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$

$$[2 \text{ قاس}^2 \text{ظاس} , 2 \text{ قاس}^2 \text{ظاس} , 2 \text{ قاس}^2 \text{ظاس} , 2 \text{ قاس}^2 \text{ظاس}]$$

■ [٢٠] إذا كان ص = طا (٥ + س٣) ٧ طا (٥ + س٣) ٧ فإن ص' =
[صفر أ، ٣ أ، ٥ أ، ٧]

ثالثاً: إذا كانت ص = د (س) أوجد $\frac{و}{س}$ لكل من العلاقات الآتية :

■ [٢١] ص = $\frac{١ - طا^٢ س}{١ + طا^٢ س}$ ■ [٢٢] ص = س٣ قا٢ س

■ [٢٣] ص = قتا (جا س) ■ [٢٤] ص = قا (جتا س)

■ [٢٥] ص = $\sqrt{١ + س^٢}$ ■ [٢٦] ص = جا س قاس

■ [٢٧] ص = ٢ قاس - قتا٢ س ■ [٢٨] ص = قتا $\sqrt{١ + س^٢}$

■ [٢٩] جا (س ص) = ٢ س - ظنا ٢ س ■ [٣٠] ص = قا ٣ س

■ [٣١] ص = $\frac{ظا ه س}{ظنا ه س}$

■ [٣٢] ص = $\frac{جا ٣ س}{قتا ٢ س}$ أثبت أن : $\frac{و}{س} - جتا ٣ س جا ٢ س = ٢ جا ٥ س$

المجموعة الثانية :

➤ مسائل على مشتقة الدالة الضمنية .

أكمل ما يأتي :

■ [١] $\frac{و}{س} (س ص) = \dots\dots\dots$

■ [٢] إذا كان ما ه س = س فإن $\frac{و}{س} = \dots\dots\dots$

■ [٣] إذا كان ما ه س = س فإن $(\frac{و}{س})' = \dots\dots\dots$

■ [٤] $\frac{و}{س} = (\sqrt{١ - س^٢})' = \dots\dots\dots$

■ [٥] ص' = $\sqrt{٢ + س}$

■ [٦] إذا كان س' + ص' = ١ فإن ص' =

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[٧] ■ إذا كان $ص^٢ = ٣س^٢ - ٥$ فإن $\frac{وس}{وس} = \dots\dots\dots$

[$\frac{س٣}{ص}$ ، $\frac{ص٣}{س٣}$ ، $٦س$ ، $\frac{س٣-}{ص}$]

[٨] ■ إذا كان $س٣ص^٢ = ١$ فإن $ص^١$ عندما $ص = ١$ تساوى $\dots\dots\dots$

[١ ، $١ -$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢} -$]

[٩] ■ إذا كان $س^٢ + ص^٢ = ٢$ فإن $\frac{وس}{وس} = \dots\dots\dots$

[$\frac{س}{ص}$ ، $\frac{س}{ص} -$ ، $\frac{ص}{ص}$ ، $\frac{ص}{ص} -$]

[١٠] ■ إذا كان $س^٢ص^٢ = ٢$ فإن $\frac{وس}{وس} = \dots\dots\dots$

[$\frac{ص}{س} -$ ، $\frac{ص}{س}$ ، $\frac{ص}{س}$ ، $\frac{س}{س} -$]

[١١] ■ إذا كان $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ٢$ فإن $ص^١ = \dots\dots\dots$

[$(\frac{ص}{س})^٢$ ، $(\frac{س}{ص})^٢$ ، $\frac{١-ص٢}{١-٢س}$ ، $(\frac{ص}{س})^٢ -$]

إذا كانت $ص = د (س)$ أوجد $\frac{وس}{وس}$ لكل من العلاقات الآتية :

[$\frac{س-}{ص}$]

[١٢] ■ $٩ = س^٢ + ص^٢$

[$\frac{١-س^٢}{ص}$]

[١٣] ■ $س٣ - ص٣ = ٣س$

[$\frac{٢-ص}{س٣}$]

[١٤] ■ $٠ = ٦ + ٣ص^٢$

[$\frac{س٣}{ص٢}$ ، $\frac{ص٣}{س٢}$]

[١٥] ■ $س٣ = ٣ص^٢$

[$\frac{س-٣}{٤=ص}$]

[١٦] ■ $٠ = س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٨ص - ١١$

[١]

[١٧] ■ $س^٢ + ص^٢ = ٢سص$

$$\left[\frac{s^2 - s^3}{s^3 + s^4} \right]$$

$$\left[\frac{s^2 - s^3}{s^3 + s^4} \right]$$

$$[1 -]$$

$$\left[\frac{\sqrt{s} - \sqrt{s}}{\sqrt{s}} \right]$$

$$[18] \blacksquare \quad s^2 - s^3 - s^4 = 9$$

$$[19] \blacksquare \quad s^3 - s^4 - s^5 = 0$$

$$[20] \blacksquare \quad s^3 + s^4 + s^5 + s^6 = 10$$

$$[21] \blacksquare \quad 1 = \sqrt{s} + \sqrt{s}$$

$$[22] \blacksquare \quad \text{إذا كان } p = \text{ثابت} , n \text{ عدد صحيح موجب}$$

$$(p) \quad n p = n s + n s$$

$$(b) \quad n p = n s \cdot n s$$

$$\left[\frac{s}{s} - \left(\frac{s}{s} \right)^{1-n} \right]$$

$$[23] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s^3 = s^0 - s^3 + s^4 , \text{ أوجد قيم } s \text{ التي يكون عندها}$$

$$\left[\frac{1}{3} , \frac{1}{3} \right]$$

$$\frac{u}{s} = \text{صفر} .$$

$$[24] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s^3 = s + s^4 \text{ أوجد } \frac{u}{s} \text{ عندما } s = 1$$

$$[25] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s^4 + s^5 - s^6 = 0 \text{ (حيث } p \text{ ثابت) فأثبت أن :}$$

$$1 = \left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)$$

$$[26] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s = (s^2 - 1)^6 \text{ فأثبت أن : } \frac{u}{s} = \frac{s^2 - 1}{s^2}$$

$$[27] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s^4 = (1 + s^2) \text{ فأثبت أن : } s^3 = s + \frac{u}{s} = 0$$

$$[28] \blacksquare \quad \text{إذا كان } (1 + s)^3 = (s - 2)^4 \text{ فأثبت أن : } 9 = (1 + s) \left(\frac{u}{s} \right)^2 = 4$$

$$[29] \blacksquare \quad \text{إذا كان } (s - s^4) = (s + s^2) \text{ فأثبت أن : } \frac{u}{s} = \frac{s^4}{s^2} - \frac{s^4}{s} = 3$$

$$[30] \blacksquare \quad \text{إذا كان } p = \frac{s}{s} + \frac{s}{s} \text{ فأثبت أن } \frac{u}{s} = \frac{u}{s} \text{ (} p \text{ ثابت)}$$

$$[31] \blacksquare \quad \text{إذا كان جتا } s = s \text{ فأوجد } \frac{u}{s}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل على المشتقات العليا

أكمل ما يأتي :

■ [١] إذا كان : $V = \frac{W^3}{S^3} + \frac{W^2}{S^2} + \frac{W}{S} + V$ فإن $\frac{dV}{dS} = \dots$

■ [٢] إذا كان $D(S) = B S^3 + C S^2 + 1 + S$ وكان $D'(1) = 4$ فإن $B = \dots$

■ [٣] المشتقة الخامسة لدالة كثة حدود من الدرجة الرابعة تساوى \dots

■ [٤] $\frac{d^2 W}{dS^2} = (4S^3 + 10) \dots$

■ [٥] إذا كانت كل من V ، S دالتين في E وكان $\frac{dV}{dS} = \frac{W}{S}$ ، $\frac{dV}{dS} = 2S$ فإن

$\frac{d^2 W}{dS^2} = \dots$

■ [٦] إذا كان $D(S) = \frac{\pi}{4} S^2$ فإن $D'(S) = \dots$

■ [٧] $\frac{d^2 W}{dS^2} = (J S) \dots$

أختار الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [٨] إذا كانت : $V = \frac{W^2}{S^2}$ فإن $\frac{dV}{dS} = \dots$

[$2 - J S$ ، $J S$ ، $2 - J S$ ، $2 J S$]

■ [٩] إذا كانت : $D(S) = 5 S^3 + 5 S^2 + 3 S$ فإن $D'(0) = \dots$

[$J S$ ، 4 ، $4 - S$ ، $2 - J S$]

■ [١٠] إذا كانت : $V = -J S + \frac{W^2}{S^2}$ فإن $\frac{dV}{dS} = \dots$

[$J S$ ، $-J S$ ، 0 ، $2 J S$]

■ [١١] إذا كانت : ص = جا^١س - جتا^١س فإن : $\frac{و^٢ص}{وس^٢} = \dots\dots\dots$

[- جتا^٢س أ، ٢ جا^٢س أ، - ٤ جتا^٢س أ، - ٤ ص]

■ [١٢] إذا كان : $\sqrt{ص} = \text{جا ع}$ ، س = جتا ع فإن : $\frac{و^٢ص}{وس^٢} = \dots\dots\dots$

[- ٢ جتا ع أ، - ٢ جا ع أ، $\sqrt{ص}$ أ، ٢ س]

■ [١٣] إذا كان د (س) = س^٣ - س^٣ + ٦س - ٧ فإن : د'' (٠) = $\dots\dots\dots$

[٦ أ، - ٦ أ، ٧ أ، - ٧]

■ [١٤] إذا كان : ص = س^٢ + ٢س وكان $\frac{و^٢ص}{وس^٢} = ٣ - ص$ فإن س = $\dots\dots\dots$

[١ أ، ٢ أ، ١ - أ، ٢ -]

■ [١٥] إذا كان د (جاس) = جا^١س فإن : د'' (٠) = $\dots\dots\dots$

[١ أ، ٢ أ، π أ، $\frac{\pi}{٢}$]

■ [١٦] المشتقة الخامسة للدالة : ص = س^٥ + ٧ تساوى $\dots\dots\dots$

[س أ، ٥ أ، ١٢٠ أ، صفر]

■ [١٧] إذا كانت ص = $\frac{٢}{٥}س^٥ - \frac{١}{٤}س^٤ + \frac{٢}{٣}س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ + ٧س - ١٢$

أوجد $\frac{و^٦ص}{وس^٦}$ [صفر]

■ [١٨] إذا كانت : ص = (٣س - ٢)^٥ أوجد $\frac{و^٤ص}{وس^٤}$ عند س = ١

[٩٧٢٠]

■ [١٩] إذا كانت : ص = $\frac{١}{٥}س^٥ + \frac{٣}{٤}س^٤ + ٢س^٣ + ٧س - ١٥$ أوجد قيمة $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$

عندما $\frac{و^٤ص}{وس^٤} = \text{صفر}$ [$-\frac{٤٥}{٨}$]

أوجد المشتقة الثانية لكل من الدوال الآتية :

$$[20] \blacksquare \quad \frac{s^3 - 2s^2 + 3}{s^2} = (s) \quad d$$

$$[\frac{1}{s} - s^{\frac{1}{2}} (s+2)]$$

$$[21] \blacksquare \quad (s^2 - \sqrt{s}) = (s) \quad d$$

$$[\frac{4}{9} (s+6) (s^2+2) (s^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{s})]$$

$$[22] \blacksquare \quad \sqrt{(s^2+2)^2} = (s) \quad d$$

$$[2 - 24s^2 + 30s^4]$$

$$[23] \blacksquare \quad s^2 (s-1)^2 = (s) \quad d$$

$$[2 - (s^3 + 12s) (s^2 + 4s) - \frac{1}{s^2}]$$

$$[24] \blacksquare \quad s \sqrt{s+4} = (s) \quad d$$

أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية :

$$[0 \neq s, (s+2)^0 - 12s]$$

$$[25] \blacksquare \quad \frac{s^2+1}{s^2} = (s) \quad d$$

$$[1 - s^4, (s+1)^{-1}, s \neq 1]$$

$$[26] \blacksquare \quad \frac{s}{s+1} = (s) \quad d$$

$$[\frac{3}{s} < s, (s^2-3) - \frac{1}{s^2}]$$

$$[27] \blacksquare \quad \sqrt{s^2-3} = (s) \quad d$$

$$[28] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } v = (s^2-2)(s+5), \quad c = s^2 - 12s + 9 \quad \text{فأثبت أن:}$$

$$10 = \frac{c^2}{s^2} - \frac{v^2}{s^2}$$

$$[29] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } 3v^2 = s^2 - 3s^3 + 6s \quad \text{فأثبت أن:}$$

$$v \frac{v^2}{s^2} + (\frac{v}{s})^2 = 1 + s^2$$

$$[30] \blacksquare \quad \text{إذا كان } 3s^4 = 4v^3 - 5 \quad \text{إثبت أن } \frac{3s^3}{v^2} = \frac{v^2}{s^2} + \frac{2}{v} (\frac{v}{s})^2$$

$$[31] \blacksquare \quad \text{إذا كان } s = v \quad \text{إثبت أن } s \frac{v^2}{s^2} + 3s \frac{v}{s} + v = 0$$

$$[32] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s^2 v^2 = 1 \quad \text{أثبت أن } \frac{v^2}{s^2} - \frac{v^2}{s^2} = 0$$

$$[33] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } s^m v^n = 1 \quad \text{أثبت أن } \frac{v^2}{s^2} = \frac{(m+n)v}{n s^2} \quad \text{حيث } m, n \text{ عددان}$$

قياسيان ثابتان .

■ [٣٤] إذا كان $s + 2s + s = 5$ أثبت أن $(1 + s^2) \varepsilon = \frac{s^2}{s^2} \varepsilon$

■ [٣٥] إذا كان $s = \frac{1+s^2}{2-s}$ فأثبت أن $\frac{s^2}{s^2} \times \frac{2}{s-2} = \frac{s^2}{s^2}$

■ [٣٦] إذا كان $s = \sqrt{1+s^2}$ فأثبت أن $(1 + s^2) \varepsilon = \frac{s^2}{s^2} \varepsilon + \frac{s^2}{s^2} \varepsilon + \frac{s^2}{s^2} \varepsilon = 0$

■ [٣٧] إذا كان $d(s) = \frac{s}{1+s^2}$ فأثبت أن :

$(s^2 + 1) d'(s) + 3s d'(s) = 0$

■ [٣٨] إذا كان $s^2 - s = v$ فأثبت أن :

$\frac{s^2}{s^2} (2 - s) + (2 - s) \left(\frac{s}{s} \right) - \frac{s}{s} = 0$

■ [٣٩] إذا كان $\frac{s}{s} + \frac{s}{s} = 0$ حيث ε ثابت فأثبت أن $\frac{s^2}{s^2} = 0$

■ [٤٠] إذا كانت $s = \frac{1+s^3}{2(1-s)}$ ، $s \neq 1$ فأثبت أن :

$(1 - s) \left(\frac{s^2}{s^2} + \frac{s}{s} \right) \varepsilon + \frac{s}{s} (1 - s) \varepsilon + s^2 = 0$

■ [٤١] إذا كانت $s = (s + \sqrt{1+s^2})^2$ فأثبت أن :

$(1 + s^2) \left(\frac{s^2}{s^2} + \frac{s}{s} \right) - \frac{s}{s} = 0$

■ [٤٢] إذا كانت $s = d(e)$ ، $e = r(s)$ فأثبت أن :

$\frac{s^2}{s^2} = \frac{s^2}{e^2} \times \left(\frac{e}{s} \right)^2 + \frac{e}{s^2} \times \frac{s}{e}$

■ [٤٣] إذا كانت $s = 1 - \varepsilon$ ، $s = 3 - \varepsilon$ أوجد قيمة $\frac{s^2}{s^2}$ عندما $\varepsilon = 2$

■ [٤٤] إذا كانت $ص = (س^٢ + ٣)(س - ١)$ ، $ع = (س + ١)(س + ٤)$ فأثبت أن :

$$\frac{س^٢ص}{ع} = \frac{س^٢(س^٢ + ٣)}{(س + ١)(س + ٤)}$$

■ [٤٥] إذا كانت $ص = \frac{١}{س}$ فأوجد الصيغة العامة للمشتقة $\frac{دص}{دس}$ حيث $ص$ عدد صحيح

موجب . ماقيمة $\frac{دص}{دس}$ (١) ؟

■ [٤٦] أوجد المشتقة الثالثة للمنحنى $ص = جاس جتا س$

■ [٤٧] أوجد $ص^{(٣)}$ للمنحنى $ص = جتا (س - \pi)$

■ [٤٨] إذا كان $ص = ٣ جتا (س + ١)$ فأثبت أن : $\frac{دص}{دس} + ع = ٠$

■ [٤٩] إذا كان $\frac{دص}{دس} = س - ٣$ ، $\frac{دع}{دس} = س - ١$ فأوجد $\frac{دص}{دع}$ عند $س = ٢$

■ [٥٠] إذا كان $س = \frac{١ + ص}{١ - ص}$ ، $ص = \frac{١ - ص}{١ + ص}$ فأوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $ص = ٢$

المجموعة الرابعة :

➤ مسائل على التطبيقات الهندسية

أولاً : أكمل ما يأتي :

■ [١] ميل المماس للمنحنى $ص = س^٢ + ٤س^٣ = ع$ عند النقطة $(٢ - ، ٦)$ الواقعة عليه هو

■ [٢] إذا كانت $د(س) = ٣س + ر(س)$ ، وكان $ر'(١) = ١$ فإن ميل المماس لمنحنى الدالة $د$ عند $س = ١$ يساوي

■ [٣] قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $ص = س^٢ + ٢س = ٦$ عند النقطة $(١ ، ٢)$ في الاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى

■ [٤] إذا كان المستقيم $س - ٢ص + ٣ = ٠$ عمودى من النقطة $(١ ، ٢)$ على منحنى الدالة

$ص = د(س)$ والتي فيها $\frac{دص}{دس} = -٤س + ٢$ فإن $٢ =$

- [٥] ميل المماس للمنحنى $ص = ظا^٢ س - قا^٢ س$ عند أى نقطة عليه =
- [٦] ميل المماس للمنحنى $ص = س^٣ قا^٣ س$ عند أى نقطة عليه =
- [٧] ميل المستقيم : $س = ٣ - ٢ ل$ ، $ص = ٢ + ل$ (حيث $ل =$ ثابت)
- [٨] ميل المستقيم : $س = ١ + ٢ ل$ ، $ص = ٢ + ٣ ل$ (حيث $ل =$ ثابت) ..
- [٩] ميل العمودى على المستقيم : $س = ١ + ل$ ، $ص = ٣ - ل$ (حيث $ل =$ ثابت) هو ...
- [١٠] ميل العمودى على المستقيم : $س = ل$ ، $ص = ٢ ل$ (حيث $ل =$ ثابت) هو
- ثانياً : أختار الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :
- [١١] العمودى للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٤$ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة
 [(٤ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)]
- [١٢] إذا كان منحنيا الدالتين د (س) ، ر (س) متماسان عند النقطة (٥ ، ٣) وكانت د' (٣) = ٧ فإن ر' (٣) =
 [٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨]
- [١٣] ميل المماس لمنحنى الدالة $س^٢ + ص^٢ = ١$ عند $س = \frac{٣}{٥}$ يساوى
 [$\frac{٣}{٤} -$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٤} -$ ، $٠,٧٥$]
- [١٤] ميل المماس للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = س + ص$ عند النقطة (٠ ، ١) =
 [٣ ، ٢ ، ١ ، صفر]
- [١٥] ميل المماس للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٣$ عند النقطة (٣ ، ١) هو
 [٦ ، ٣ ، ٢ ، ٦ -]
- [١٦] ميل المماس للمنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٤ ص = ٥$ عند النقطة (٢ ، - ١) هو
 [$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٦} -$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣} -$]

■ [١٧] إذا كان $ص = جاس قاس$ فإن $\frac{وس}{وس} = \dots\dots\dots$

[قاس^٢ س^٢ أ، ظاس^٢ س^٢ - ١ أ، - ظاس^٢ س^٢ أ، قاس^٢ س^٢]

■ [١٨] إذا كان $ص = ظاس$ فإن $\frac{وس}{وس} = \dots\dots\dots$

[- قاس ظاس أ، قاس^٢ س^٢ أ، قاس ظاس أ، - قاس^٢ س^٢]

■ [١٩] إذا كان $ص = \sqrt{١ + ظاس}$ فإن $\frac{وس}{وس} = \dots\dots\dots$ عند $س = \frac{\pi}{٣}$

[$\sqrt{٣}$ أ، $\sqrt{٣}$ أ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$]

■ [٢٠] ميل المماس لمنحنى الدالة $د(س) = \sqrt{١ + ظاس}$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$ هو $\dots\dots\dots$

[$\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$]

ثالثاً: أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبيّنة أمام كل منها:

■ [٢١] $س^٢ + ص^٢ = ٣س + ص + ٢$

عند النقطة (١، ٠)

■ [٢٢] $س^٣ ص^٢ = ٤$

عند النقطة (١، ٢)

■ [٢٣] $س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٣ص = ٣$

عند النقطة (١، -١)

■ [٢٤] $ص = \frac{١ - ظاس}{١ + ظاس}$

عند $س = \frac{\pi}{١٢}$

■ [٢٥] $ص = جاس قاس$

عند النقطة $(١, \frac{\pi}{٣})$

أجب عن الأسئلة الآتية:

■ [٢٦] أوجد ميل المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{٩} س^٣ قاس^٢ س$ عند أي نقطة عليه.

■ [٢٧] أوجد ميل المماس للمنحنى $ص = قاس (جتاس)$ عند أي نقطة عليه.

■ [٢٨] أوجد ميل المماس للمنحنى $ص = \frac{٣}{٧} قاس (جاس٧ س)$ عند أي نقطة عليه.

[٢٩] ■ أثبت أن معدل تغير ميل المماس للمنحنى $ص' = (ظا س + قاس)$ عند أي نقطة واقعته عليه يساوي $\frac{ص}{ق} قاس (ظا س + \frac{ص}{ق} قاس)$

[٣٠] ■ إذا كان $ص = \frac{١}{جا س}$ فأثبت أن معدل التغير لميل المماس لهذا المنحنى $= ٩$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$.

[٣١] ■ أثبت أن معدل تغير ميل المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{جتا س}$ عند النقطة $(٢, \frac{\pi}{٣})$ يساوي ١٤

[٣٢] ■ أثبت أن المماس للمنحنى $س' - س' ص + ٢ ص' = ١٨$ عند النقطة $(١, ٣)$ يوازي محور السينات.

[٣٣] ■ برهن أن المماس للمنحنى $ص = -س' (س + ٣)$ عند $س = -٢$ يوازي المماس للمنحنى $ص = \frac{٨-٢س}{١+٢س}$ عند $س = ١$

[٣٤] ■ إذا كان المماس لمنحنى الدالة $٢ س' + ص' - ٢ س + ب ص = ٣$ يوازي محور السينات عند النقطة $(١, -١)$ فأوجد قيمتي ٢ ، $ب$.

[٣٥] ■ إذا كان المستقيم $٢ س - ٣ ص - ٢ = ٠$ ممس لمنحنى الدالة

$س' + ص' = ٢$ $س + ص + ب$ عند النقطة $(١, ٠)$ فأوجد قيمتي ٢ ، $ب$.

رابعاً : مسائل على معادلة المماس والعمودي لمنحنى :

أكمل ما يأتي :

[٤٠] ■ المستقيم $ص = س$ ممس لمنحنى الدالة $ص = جا س$ عند النقطة

[٤١] ■ معادلة المماس لمنحنى الدالة $ص' = جتا س$ عند النقطة $(١, ٠)$ هي

[٤٢] ■ إذا مس محور الصادات لمنحنى الدالة $ص = \sqrt{س + ٢}$ فإن $٢ =$

[٤٣] ■ إذا كان المستقيم $ص = س$ مماساً للمنحنى $ص = س' + ٢$ فإن $٢ =$

[٤٤] ■ إذا كانت معادلة العمودي على منحنى $د(س)$ عند النقطة $(٣, ٠)$ هي

$٢ س - ٣ ص = ٦$ فإن $د'(٣)$ تساوي

أجب عن الأسئلة الآتية :

■ [٤٥] أثبت أن المماسين لمنحنى الدالة $D(s) = s^2 - 5s + 6$ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات متعامدان

■ [٤٦] أوجد معادلة كل من المماس والعمودي لمنحنى الدالة $3s^2 - 6s - 1 = 0$ عند النقطة التي يكون المماس عندها موازياً لمحور الصادات

■ [٤٧] أوجد معادلة المماس للدائرة $s^2 + s^2 - 4s + 4 = 12$ عند كل نقطة من نقط تقاطعها مع المحور الصادي

■ [٤٨] أوجد معادلتى المماسين للمنحنى $s^2 = 4s$ عند نقطتي تقاطعه مع المستقيم $4s - 2 = 3$

■ [٤٩] أوجد معادلتى المماسين لمنحنى الدالة $s = s^2 + 1$ اللذين يوازيان المستقيم $3s + s - 5 = 0$

■ [٥٠] أوجد معادلتى المماسين للمنحنى الذى معادلته $s = s + s$ والموازي للمستقيم $10 = 4s$

■ [٥١] أوجد معادلة كل من المماسين للدائرة $s^2 + s^2 - 4s - 2 = 0$ العموديان على المستقيم $2s + s + 5 = 0$

■ [٥٢] أوجد ميل المماس للمنحنى $s^2 - 3s - 3 = 3$ عند النقط $(1, 1)$ ثم أوجد كلاً من معادلة المماس ومعادلة العمودي للمنحنى عند هذه النقطة.

■ [٥٣] أوجد معادلة المماس للمنحنى $s = 4s + 3$ عند النقطة $(1, 2)$

■ [٥٤] أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى $s = 3s + 3$ عند $s = \frac{\pi}{3}$

■ [٥٥] أوجد معادلتى المماس والعمودي على المنحنى $s = 3s$ عند النقطة $(1, \frac{\pi}{4})$

■ [٥٦] أوجد معادلة المماس للمنحنى $s = 3s$ عند $s = \pi$

■ [٥٧] بين أن $(2, 3)$ تقع على المنحنى $s^2 + s + s^2 = 19$ ، ثم أوجد معادلة المماس والعمودي على المنحنى عندها .

■ [٥٨] أوجد معادلة المماس المرسوم للمنحنى $s^2 + s = 6$ عند النقطة $(1, 2)$

■ [٥٩] أثبت أن الدائرتين : $س^٢ + ص^٢ - ١٢ س - ٦ ص + ٢٥ = ٠$

، $س^٢ + ص^٢ + ٢ س + ص - ١٠ = ٠$ متماستان عند النقطة (١، ٢)

■ [٦٠] أثبت أن معادلة المماس الذي ميله $م$ للمنحنى $ص^٢ = ٤ س$ هي $ص = م س + \frac{٢}{م}$

■ [٦١] أوجد قيمتي الثابتين $ل$ ، $هـ$ حتى يتماس المنحنيان $س^٢ = ل ص + ١$ ، $ص = هـ س - س^٢$ عند النقطة (١، ٠) ثم أوجد معادلة المماس المشترك وكذلك معادلة العمودى عند نقطة التماس .

■ [٦٢] أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات و $المس$ والعمودى للمنحنى

$ص^٢ + ٢ ص - ٤ س + ٤ = ٠$ عند النقطة (١، ٢)

■ [٦٣] أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماسين للدائرة

$س^٢ + ص^٢ = ٢ س + ٤ ص - ٢٤ = ٠$ عند نقطتي تقاطعها مع محور السينات

■ [٦٤] أوجد معادلة المماس للمنحنى المعرف بارامترياً كالتالي : $س = ق هـ$ ، $ص = ظ هـ$ حيث

$$\frac{\pi}{٢} > هـ > \frac{\pi}{٤} \text{ عند النقطة } (١، \sqrt{٢}) \text{ حيث } \frac{\pi}{٤} = هـ$$

المجموعة الخامسة :

➤ مسائل على المعدلات الزمنية المرتبطة .

أولاً : أكمل ما يأتي :

■ [١] مربع يزداد محيطه بمعدل ٤٠ سم/د فإن مساحة سطحه تزداد بمعدل ٦ سم^٢/د عندما يكون طول ضلعه

■ [٢] إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{\pi}{٥}$ فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل

■ [٣] سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية فإذا عُلِمَ أن طول نصف قطر الموجة يزداد

بمعدل ٢ سم/ث فإن معدل زيادة مساحة الموجة بعد مرور ٣ ثوان يساوى سم^٢/ث

■ [٤] إذا تحرك جسم على المنحنى $ص^٢ + س^٢ = ٧$ ، وكان $\frac{وص}{و هـ} = ٢$ فإن $\frac{وس}{و هـ} = \dots\dots\dots$ عند

$$(\sqrt{٣} - \sqrt{٣})$$

[٥] ■ إذا كان س^٣ ص^٢ = ١٠٨ وكان $\frac{و}{س} = ١$ عند س = ٢ ، ص = ١ فإن $\frac{و}{س} = \dots$

[٦] ■ إذا كان ص^٢ = ٢ س + ٥ فإن $\frac{و}{س}$ عند س = ١ ، $\frac{و}{س} = ١,٥$ تساوى

[٧] ■ إذا كان ص = جتا س فإن $\frac{و}{س}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ تساوى

[٨] ■ إذا كان معدل تناقص طول قوس قطاع دائري ٠,٢ ويتناقص نصف قطر الدائرة بمعدل ٠,٦ فإن معدل تغير محيط القطاع =

[٩] ■ بالون كروي طول نصف قطره ٨ سم ويزداد بمعدل ٠,٢ سم/ث فإن معدل تغير مساحة سطحه بالنسبة للزمن =

[١٠] ■ إذا كان طول ضلع مكعب يزداد بمعدل ٠,٢ سم/ث فإن مساحته السطحية تزداد بمعدل عندما يكون طول ضلعه ٥ سم .
ثانياً : أختار الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١١] ■ مستطيل طوله ضعف عرضه فإذا كان معدل تغير طوله = ١٠ سم/ث فإن معدل تغير عرضه =
[٥ أ ، ١٠ أ ، ١٢ أ ، ٢٠ أ]

[١٢] ■ إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٢}{\pi}$ سم / ث فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل سم/ث
[$\frac{٤}{\pi}$ أ ، π أ ، π أ ، ٤ أ]

[١٣] ■ وعاء فارغ حجمه ٣٥ سم^٣ يصب فيه الماء بمعدل ٧ سم^٣/ث فإن الوعاء يمتلئ بعد مرور ث
[٥ أ ، ٧ أ ، ٢٤٥ أ ، ٣٥ أ]

[١٤] ■ إذا كانت ص = ١ + س^٣ ، ع = ٢ - س^٣ فإن معدل تغير ص بالنسبة لـ ع =
[١٨ أ ، $\frac{١}{٢٨}$ أ ، ١٨ أ ، ٦ أ]

[١٥] ■ يزداد طول أحد النباتات بمعدل $\frac{١}{٥}$ سم/يوم فإذا كان طول أحد النباتات ٢٠ سم فإن طوله بعد زمن س يوم حيث $س \in [٠, ٢٠]$ يعطى بالعلاقة

[ل (س) = ٢٠ أ ، ل (س) = $\frac{١}{٥} + ٢٠$ أ ، ل (س) = $(\frac{١}{٥}) + ٢٠$ أ ، ل (س) = $\frac{١}{٥} + ٢٠$ أ]

[١٦] ■ كوب فارغ سعته ١٦٠ سم^٣ يُملأ بسائل بمعدل $٢(١ + \sqrt{٦})$ سم^٣/ث فإنه يمتلئ تماماً خلال زمن قدره ث .
[٢ أ ، ٤ أ ، ٥ أ ، ٦ أ]

[١٧] ■ إذا تحركت نقطة على المستقيم ٣ سم + ٢ ص = ٧ فإن النسبة بين معدل تغير الإحداثي السيني إلى معدل تغير الإحداثي الصادي تساوى
[٣ أ ، $\frac{٣}{٧}$ أ ، $\frac{٢}{٣}$ أ ، $\frac{٣}{٢}$ أ]

[١٨] ■ يزداد طول ضلع مكعب بمعدل ٣ سم/ث فإن حجم المكعب يزداد بمعدل سم^٣/ث عندما يكون طول ضلعه ٥ سم .
[١٥ أ ، ٤٥ أ ، ٧٥ أ ، ١٥٠ أ]

[١٩] ■ كرة من الجليد تنصهر بمعدل $\pi ٧٢$ سم^٣/ث فإن معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر ٣ سم يساوى سم/ث
[٢ أ ، ٢ - أ ، $\pi ٢٤$ أ ، ٣ أ]

[٢٠] ■ مستطيل بعده (س ، ص) سم ومساحته ثابتة ، فإذا كان ص = ٤ سم ، $\frac{دس}{دو} = ٠,٤$ سم/ث فإن $\frac{دص}{دو} = \dots\dots\dots$
[١,٦ أ ، ١,٦ - أ ، ٤ أ ، ٠,٤ أ]
أجب عن الأسئلة الآتية :

[٢١] ■ إذا كانت ص = ٣ س + س أوجد $\frac{دص}{دو}$ عندما س = ٢ سم ، $\frac{دس}{دو} = ٤$ سم/ث
[٥٢ سم/ث]

[٢٢] ■ إذا كانت ع = س^٢ + ص^٢ أوجد $\frac{دع}{دو}$ عندما س = ١ سم ، ص = ٢ سم ،
 $\frac{دس}{دو} = ١ - \frac{دص}{دو}$ ، $\frac{دص}{دو} = ٢$ سم/ث
[٦ سم/ث]

[٢٣] ■ نقطة تتحرك على منحنى الدائرة س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ١٦ = ٠ فإذا كانت سرعتها في اتجاه المحور السيني تساوى ٣ سم/ث أوجد سرعتها في اتجاه المحور الصادي عند النقطة (٦ ، ٤) .
[$\frac{٩}{٤}$ سم/ث]

[٢٤] ■ تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = س^٣ - ٣ س + ٥ فإذا كان الإحداثي السيني للنقطة في أي لحظة $\sqrt{٦}$ يتعين من العلاقة س = $\frac{١}{\sqrt{٦}} + ٣$ حيث $\sqrt{٦} \leq$ صفر فأوجد معدل تغير الإحداثي الصادي للنقطة بالنسبة للزمن عندما $\sqrt{٦} = ٤$
[$\frac{٥}{٨}$ سم/ث]

■ [٢٥] نقطة تتحرك على المنحنى $s^2 - s + s^2 = 9$. أوجد إحداثيات النقطة التي يكون عندها المعدل الزمني لتغير s يساوى ضعف المعدل الزمني لتغير s .

$$[(3, 0), (0, 3)]$$

■ [٢٦] صفيحة على شكل مربع تنكمش بالبرودة محتفظة بشكلها المربع فإذا كانت مساحتها تنقص بمعدل $3.0 \text{ سم}^2/\text{د}$. فاحسب معدل النقص في طول ضلعها عندما يكون طول ضلعها 10 سم .

$$[0.01 \text{ سم/د}]$$

■ [٢٧] بقعة ضوئية دائرية أخذت في الاتساع محتفظة بشكلها الدائري بمعدل $4 \text{ سم}^2/\text{ثانية}$ ، أوجد المعدل الذي يزداد به نصف القطر عندما تكون مساحتها $4\pi \text{ سم}^2$.

$$[\frac{1}{\pi} \text{ سم/ث}]$$

■ [٢٨] صفيحة رقيقة على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه. تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها بحيث ينقص طولها بمعدل 0.01 سم/ث عندما يكون عرضها 5 سم . أوجد معدل النقص في مساحة الصفيحة عند تلك اللحظة.

$$[0.01 \text{ سم}^2/\text{ث}]$$

■ [٢٩] صفيحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع ينقص طول ضلعه بالتبريد بمعدل 0.05 سم/ث . أوجد معدل النقص في المساحة عندما يكون طول الضلع مساوياً 16 سم .

$$[\frac{1}{36} \text{ سم}^2/\text{ث}]$$

■ [٣٠] صفيحة من المعدن مثلثة الشكل تتمدد بالحرارة وارتفاعها يساوى نصف طول قاعدتها . أوجد طول القاعدة عندما يكون معدل زيادة المساحة $0.05 \text{ سم}^2/\text{ث}$ ومعدل زيادة طول القاعدة مساوياً 0.01 سم/ث .

$$[10 \text{ سم}]$$

■ [٣١] طريقان مستقيمان متعامدان يلتقيان في M ، يوجد منزل K على أحد الطريقين بحيث يبعد 3 كم عن M ، يمشى رجل على الطريق الآخر بسرعة $\frac{1}{4} \text{ كم/س}$ متجهاً نحو M . أوجد معدل تغير بعده عن المنزل في اللحظة التي يكون فيها بعده عن M مساوياً 4 كم .

■ [٣٢] سلم طوله 4 أمتار يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية فإذا كان الطرف المستند على الأرض ينزلق بسرعة $3\sqrt{2} \text{ سم/دقيقة}$ عندما كان السلم يميل على الحائط بزاوية 60° فأوجد سرعة انزلاق الطرف المستند على الحائط حينئذ .

$$[3.6 \text{ كم/ساعة}]$$

■ [٣٣] سلم طوله 100 سم يرتكز بطرفه الأعلى على حائط رأسى وبطرفه الأسفل على الأرض . فإذا كان طرفه الأسفل ينزلق مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 سم/ث . فبأى معدل ينزلق الطرف الآخر عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 90 سم من الحائط .

$$[3 - \text{ سم/دقيقة}]$$

■ [٣٤] سلم طوله 100 سم يرتكز بطرفه الأعلى على حائط رأسى وبطرفه الأسفل على الأرض . فإذا كان طرفه الأسفل ينزلق مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 سم/ث . فبأى معدل ينزلق الطرف الآخر عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 90 سم من الحائط .

$$[1.5 \text{ سم/ث}]$$

■ [٣٤] يمشى رجل بمعدل ٥ كم/ الساعة متجهاً نحو قاعدة برج ارتفاعه ٦٠ متر فبأى معدل يقترب الرجل من قمة البرج عندما يكون على بعد ٨٠ متر من قاعدة البرج

[- ٤ كم/ساعة]

■ [٣٥] ولد يمسك بيده خيط طائرة ورقية مرتفعة ١١٢ متر فإذا كانت الرياح آخذة الطائرة . من الولد أفقياً بمعدل ٦ متر/دقيقة فما هى السرعة التى يجب على الولد أن يعطيها للخيط عندما يكون بعد الطائرة عنه ١٣٠ متر .

[٣,٠٥ متر/دقيقة]

■ [٣٦] بالون على ارتفاع ١٢٠ متر مستمر فى الارتفاع بمعدل ثابت قدره ٣٠ متر/د تهر من تحته سيارة تسير فى خط مستقيم بسرعة منتظمة مقدارها ٢٠٠ متر/د . ما هو معدل تغير المسافة بينهما بعد دقيقة واحدة .

[١٧٨ متر / دقيقة]

■ [٣٧] رجل طوله ١٨٠ سم يمشى بسرعة ١٥٠ سم/ث نحو مصباح يرتفع ٤,٨ متر فوق سطح الأرض أوجد :

[- ٢٤٠ سم/ث]

[- ٩٠ سم/ث]

(أولاً) معدل تحرك نهاية ظل الرجل
(ثانياً) معدل تغير طول ظل الرجل.
(ثالثاً) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤ متر من قاعدة المصباح .

[- ١٢٠ سم/ث]

■ [٣٨] أبحرت سفينة فى الساعة السادسة صباحاً من مكان معين نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم/س وفى الساعة الثامنة صباحاً أبحرت سفينة أخرى من نفس المكان نحو الجنوب بسرعة ٢٥ كم/س أوجد معدل تغير المسافة بين السفينتين فى الساعة الحادية عشر صباحاً .

[٣١ كم/س]

■ [٣٩] ٢ ، ب نقطتان فى مستوى سطح البحر حيث ٢ = ب = ٤٨ كم ، النقطة (ب) تقع جنوب النقطة (٢) . تحرك قاربان الأول من (٢) جنوباً نحو (ب) بسرعة ٨ كم/س فى الساعة الثامنة صباحاً ، الثانى من (ب) نحو الشرق بسرعة ٢٤ كم/س فى الساعة التاسعة صباحاً . أوجد معدل تغير البعد بين القاربين فى الساعة العاشرة صباحاً . وهل يقترب القاربان أم يبتعدان حينئذ .

[٨ كم/س]

■ [٤٠] ٢ ج ، ب ج طريقان متعامدان ، طول ٢ ج = ٩٠ متر وطول ب ج = ٧٠ متر . يسير

رجلان : الأول فى الطريق ٢ ج نحو ج بسرعة منتظمة ٦ متر/ث والثانى فى الطريق ب ج

نحو ج أيضاً بسرعة منتظمة ٨ متر/ث . اثبت أن أقصر بعد ف بين الرجلين بعد مضى

الزمن ٧ من لحظة إنطلاقهما معاً كل من أول طريقه يتعين بالعلاقة

في ١٠٠ = ٢ (١٣٠ + ٨٢٢ - ٨) ثم استنتج معدل تغير ف بالنسبة إلى ٨ عندما

٨ = ٨ ثانية أوجد كذلك معدل تغير مساحة المثلث و ج و بالنسبة للزمن في نفس اللحظة

حيث و ، و هما موضعا الرجلين عند أي لحظة . [- ٢٦ ٥ م / ث ، - ١٨٦ م / ث]

■ [٤١] ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سم . تحركت النقطة ٨ من ب إلى ح

بسرعة ٣ سم / ث ، فإذا كان طول ٨ = ٨ ص ، ب = ٨ س فأوجد ص بدلالة س ثم

أوجد معدل تغير ص بالنسبة للزمن عندما س = ٣ سم . [- ٣ م / ث]

■ [٤٢] خطان حديديان متلاقيان في زاوية قياسها ١٢٠° يسير قطار على أحدهما بسرعة ٧٨

كم / ساعة نحو نقطة التقاطع ٢ . فما هو معدل اقترابه من محطة تقع على الخط الآخر

وتبعد عن ٢ بمقدار ٤ كم عندما يكون بعده عن ٢ يساوي ٣ كم .

[٦٦ كم / ساعة]

■ [٤٣] بدأت سفينة الحركة من موقع ٢ بسرعة منتظمة ١٨ كم / س في اتجاه الشمال وبعد

ساعتين سارت في اتجاه ٣٠° شمال الشرق . أوجد معدل تغير المسافة بين موضع السفينة

والموقع ٢ بعد ٤ ساعات من بدء الحركة . [٣٦٩ كم / س]

■ [٤٤] ٢ ب ، ٢ ج طريقان متلاقيان يحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° . تحركت سيارة على الطريق

٢ ب من نقطة ٢ بسرعة ١٦ كم / س ، وبعد ١٥ دقيقة تحركت سيارة أخرى على الطريق

٢ ج بسرعة ٢٠ كم / س . أوجد معدل تباعد السيارتين بعد ١٥ دقيقة من تحرك الثانية .

[١٠٨ م / س]

■ [٤٥] عندما يكون حجم كمية من الغاز ح سم ٣ فإن ضغطها يكون ض وزن جـم على كل سم ٢ .

ويربطهما العلاقة ح × ض = ٨٠٠ . فإذا زاد الضغط بمعدل ثابت قدره ١٨ ث جم / دقيقة .

فأوجد معدل تغير الحجم عندما يكون الضغط ٣٠ وزن جم / سم ٢ . [- ١٦ سم ٣ / دقيقة]

■ [٤٦]

من المعلوم أن شدة الاستضاءة عند نقطة تناسب عكسياً مع مربع البعد عن مصدر الضوء .

يتحرك قارب في اتجاه منارة بسرعة ثابتة فإذا كان ارتفاع المنارة ٥٠ متر . أثبت أن معدل

إزدیاد شدة الاستضاءة عند القارب عندما يكون على بعد ٥٠ متر من قاعدة المنارة

$\frac{20}{8}$ مرة قدر معدلها عندما يكون القارب على بعد ١٠٠ م من قاعدة المنارة .

■ [٤٧] إذا كان طولاً ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ ، ٦ سم فإذا كان الضلع الأول

يتناقص بمعدل $\frac{1}{6}$ سم/ دقيقة والضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم/دقيقة أوجد :

(٢) معدل تزايد مساحة المثلث بعد دقيقتين . $\left[\frac{3}{6} \text{ سم}^2/\text{دقيقة} \right]$

(ب) الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة . $[٥ \text{ دقائق}]$

■ [٤٨] صفيحة معدنية رقيقة على شكل مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ١٢ م ٣ سم . تتمدد

بالحرارة بحيث يظل طول القاعدة ثابتاً بينما يتمدد كل من ساقى المثلث بمعدل ١٥، ٠ سم/ساعة . أوجد معدل زيادة مساحة سطح الصفيحة عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من ساقى المثلث مساوياً لطول قاعدته . $[١,٨ \text{ سم}^2/\text{س}]$

■ [٤٩] ٢ ب ج مثلث متساوى الساقين . طول قاعدته ب ج = ٦ سم ، ارتفاعه يساوى ٨ سم ،

ل م $[\text{ب ج}]$ ويقطع ٢ ب فى ل ، ٢ ج فى م . فإذا علم أن ارتفاع شبه المنحرف

ل ب ج م يتناقص بمعدل ٠,٥ سم/ث . أوجد معدل تناقص شبه المنحرف ل ب ج م عندما

يكون ل م منصفاً للضلعين ٢ ب ، ٢ ج . $[- ١,٥ \text{ سم}^2/\text{ث}]$

■ [٥٠] يمر جبل فوق بكرة صغيرة ملساء على ارتفاع ٢٠ متر من سطح الأرض ويحمل فى أحد طرفيه

وزن قدره "و" ويمسك بالطرف الآخر من الجبل رجل يسير بسرعة ٦ متر/ث على الأرض

مبتعداً عن البكرة . فإذا أبتدأ الرجل فى الحركة عندما كان على بعد ١٥ متر من موقع البكرة وكان طول الجبل ٤٥ متر فأوجد المعدل الذى يرتفع به الوزن عند هذه اللحظة .

$[٣,٦ \text{ متر/ث}]$

■ [٥١] مصباح مضى مثبت فى قمة برج ارتفاعه ١٦ متر عن الأرض . أسقطت كرة من نفس الارتفاع

رأسياً لأسفل من مكان يبعد مسافة ١٥ متر عن البرج فما هو معدل اقتراب ظل الكرة من

البرج عندما تكون الكرة على ارتفاع ٦ متر من الأرض . $[٣٣,٦ \text{ متر/ث}]$

■ [٥٢] يستند سلم ٢ ب طوله ٦,٥ متراً بطرفه ٢ على أرض أفقية ويأخذى نقطة ج على حافة

سور رأسى ارتفاعه ٢,٥ متراً فإذا انزلق الطرف ٢ مبتعداً عن السور بمعدل ٢,٦ متر/دقيقة

. أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما يصل إلى حافة السور . $[- \frac{12}{13} \text{ متر/دقيقة}]$

■ [٥٣] إذا كان حجم مكعب يزداد بمعدل ٣ سم^٣/ثانية . فأوجد :

(أولاً) معدل زيادة طول ضلعه .
 [$\frac{1}{36}$]
 (ثانياً) معدل زيادة مساحة أى وجه من أوجهه . وذلك فى الحالة التى يبلغ فيها طول ضلع المكعب ٦ سم .
 [$\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{36}$]

■ [٥٤] تزداد مساحة كل وجه من أوجه مكعب بمعدل ٤ سم^٢/ث . أوجد معدل ازدياد حجم

المكعب فى اللحظة التى يكون فيها طول حرفه مساوياً ١٢ سم .
 [٧٢ سم^٣/ث]

■ [٥٥] إذا كان ح هو حجم كرة ، نو هو طول نصف قطرها ، ص مساحة سطحها . فأثبت أن

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dR} \frac{dR}{dt}$$
 ومن ذلك أوجد معدل الزيادة فى الحجم عندما تزداد المساحة السطحية

للكرة بمعدل ١٢ سم^٢/ث وطول نصف قطرها = ٣ سم
 [١٨ سم^٣/ث]

■ [٥٦] كرة حديدية طول قطرها ١٠ سم مغطاة بطبقة منتظمة من الجليد . فإذا كان الجليد ينصهر

بمعدل ١٦ سم^٣/دقيقة . كم تكون سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون سمكه ٣ سم ،
 ما هى سرعة تناقص مساحة السطح الخارجى بطبقة الجليد .

[$-\frac{1}{\pi 16}$ سم/دقيقة ، - ٤ سم^٢/دقيقة]

■ [٥٧] بالون كروى حجمه ٥٦ π سم^٣ . مملوءة بغاز ونتيجة لتسرب الغاز فإن حجم البالون

ينقص بمقدار ٤ π سم^٣/دقيقة محتفظاً بشكله الكروى . أوجد :

(أولاً) معدل تغير نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره = ٢ سم .

(ثانياً) معدل تغير نصف قطر البالون بعد خمس دقائق من بدء تسرب الغاز .

[$-\frac{1}{4}$ سم/دقيقة ، $-\frac{1}{9}$ سم/دقيقة]

■ [٥٨] إسطوانة ارتفاعها $\frac{7}{4}$ طول نصف قطر قاعدتها . فإذا كان معدل تغير نصف قطرها عند

لحظة معينة ٢ سم/ث ، ومعدل تغير حجمها عند هذه اللحظة ٤٢ π سم^٣/ث فأوجد

طول نصف قطرها عند هذه اللحظة .
 [٦٢ سم]

■ [٥٩] إسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١٢ سم ويزداد بمعدل ٦ سم/الساعة ،

وارتفاعها ٢٤ سم وينقص بمعدل ٦ سم/ساعة . أوجد :

(أولاً) معدل زيادة حجم الاسطوانة .
 [٢٥٩٢ π سم^٣/ساعة]

(ثانياً) متى يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن .
 [٢ ساعة]

■ [٦٠] متوازي مستطيلات من المعدن قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ثلاثة أمثال طول ضلع قاعدته .
فإذا تمدد متوازي المستطيلات فاحسب معدل الزيادة في حجم متوازي المستطيلات عندما
يزيد طول ضلع القاعدة بمعدل ٢ سم/ث ويكون طوله ٢ سم [٧٢ سم^٣/ث]

■ [٦١] كرة معدنية جوفاء تتمدد بحيث تحتفظ بشكلها الكروي وتكون المادة المكونة لها حجمها
ثابت . فإذا علم أن طول نصف قطرها الداخلى يتزايد بمعدل ١,٥ سم/ث أوجد :
(أولاً) معدل تغير طول نصف قطرها الخارجى عندما يكون طول نصف قطرها الداخلى
٨ سم وسمكها ٤ سم . [٢/٣ سم/ث]
(ثانياً) معدل التغير في سمك الكرة عند نفس اللحظة . [٥/٦ سم/ث -]
(ثالثاً) أثبت أن معدل تغير مساحة السطح الخارجى للكرة عند نفس اللحظة يساوى ٢/٣
معدل تغير مساحة السطح الداخلى لها .

■ [٦٢] منشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٤ سم ويزداد بمعدل ٢ سم/ث وارتفاعه ٨
سم وينقص بمعدل ٤ سم/ث . فبأى معدل يزداد حجم المنشور وبعد كم ثانية يقف حجمه عن الزيادة
[٦٤ سم^٣/ث ، ٢/٣ ث]

■ [٦٣] في لحظة ما كان طول نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة يساوى ١٢ سم وارتفاعها
يساوى ٢٤ سم . فإذا أخذ نصف القطر في الزيادة بمعدل ١/٣ سم/دقيقة وفي نفس الوقت
أخذ الارتفاع في التناقص بمعدل ١/٤ سم/دقيقة . احسب حجم الأسطوانة بعد ٧ دقيقة
ومعدل زيادة حجمها في البداية . [١٢٠ π سم^٣/دقيقة]

■ [٦٤] أبعاد متوازي المستطيلات في لحظة معينة هي س = ٤ سم ، ص = ٣ سم ،
ع = ١٢ سم فإذا كانت س في هذه اللحظة تزيد بمعدل ١ سم/ث ، ص تزيد بمعدل ١/٤
سم/ث ، ع تنقص بمعدل ١ سم/ث فبين ما إذا كان طول قطر الجسم يزيد أو ينقص في
اللحظة المذكورة وبأى معدل ؟ [ينقص بمعدل ١/٤ سم/ث]

■ [٦٥] تطير طائرة أفقياً على ارتفاع ٢٠٠٠ متر متجهة نحو الجنوب بسرعة ١٥٠ متر/ث فمرت على
سيارة تسير بسرعة ٧٥ متر/ث متجهة نحو الشرق . أوجد المعدل الذى تبتعد به الطائرة عن
السيارة بعد ٤٠ ث . [١٦٠ ٥/٧ متر / ث]

تمارين (١-١) من الكتاب المدرسي

إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، أكمل ما يأتي :
باستخدام القيم المعطاه في الجدول المقابل :

س	١	٢
د(س)	١-	٤
ر(س)	٢	١
د'(س)	١	٥
ر'(س)	٢	٣-

(١) ق (س) = ٣ د (س) - ٢ ر (س) فإن ق' (١) =

(٢) ق (س) = د (س) + ٥ ر (س) فإن ق' (٢) =

(٣) ق (س) = د (س) ÷ [٢ + ر (س)] فإن ق' (١) =

(٤) ق (س) = د [ر (س)] فإن ق' (١) =

(٥) ق (س) = ر [٣ د (س) - ٢ ر (س)] فإن ق' (٢) =

(٦) ق (س) = [٢ ر (س) + ٣ د (س)] فإن ق' (١) =

أوجد $\frac{د}{ر}$ لكل مما يأتي :

(٨) ص = قتا (٢ - ٣ س)

(١٠) ص = ظا (ظتا س)

(١٢) ص = قتا (٢ س - π)

(١٤) ص = طا ٣ س - قتا ٢ س

(١٦) ص = قاس طا ٢ س

(١٨) ص = قتا (١ + س)^٢

(٢٠) ص = $\sqrt{١ + قتا س}$

(٢٢) ص = (قتا س + ظتا س)^{١٠}

(٢٤) ص = $\frac{١ - قاس}{١ + قاس}$

(٧) ص = س^٢ - ٢ قاس

(٩) ص = ظتا ($\pi - \frac{١}{س}$)

(١١) ص = (١ + ظتا س)^٢

(١٣) ص = جتا ٢ س - ٥ ظتا ٣ س

(١٥) ص = جا^٢ س + قاس^٢ س

(١٧) ص = ظتا^٢ $\sqrt{س}$

(١٩) ص = ٣ قاس^٢ (٢ س + π)

(٢١) ص = س^٢ ظتا ٣ س

(٢٣) ص = $\frac{ظتا ٣ س}{٣ + س٢}$

أجب عما يأتي :

(٢٥) إذا كانت ص = ظتا $\frac{\pi}{٦}$ ، ع ، ع = ٣ $\sqrt{س}$ أوجد $\frac{د}{ر}$ عند س = ١

(٢٦) إذا كانت ص = $\sqrt{٥ - ٤ س}$ ، ع = قاس ٢ س أثبت أن $\frac{د}{ر} = ١٢ + \frac{د}{س}$ عند س = ٠

(٢٧) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة d حيث $v = d$ (س) لكل مما يأتي :

(أ) $v = 2$ ظلًا س + $\sqrt{2}$ قًا س عند $s = \frac{\pi}{4}$

(ب) $v = 3$ طًا س - 2 قًا س عند $s = \frac{\pi^3}{4}$

تمارين (١-٢) من الكتاب المدرسي

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت $s^2 + v^2 = 1$ فإن $\frac{ds}{ds}$ يساوي :

- (أ) س (ب) $\frac{1}{v}$ (ج) $\frac{s}{v}$ (د) $\frac{v}{s}$

(٢) إذا كانت $s^2 + v^2 = s$ فإن $\frac{ds}{ds}$ يساوي :

- (أ) ١- (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

(٣) إذا كانت $v^2 - 2 = \sqrt{s}$ فإن $\frac{ds}{ds}$ يساوي :

- (أ) $\frac{2v}{\sqrt{s}}$ (ب) \sqrt{s} (ج) $\frac{s}{2v}$ (د) $\frac{1}{2v}$

(٤) إذا كان $s + 2v^2 + 3 = v$ ، $\sqrt{v^3} = 1$ فإن $\frac{ds}{ds}$ يساوي :

- (أ) $\frac{3}{8}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) ٢ (د) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى $s = v^2$ عند النقطة (٣، ١) يساوي :

- (أ) ٣- (ب) $-\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

ثانياً : أوجد $\frac{ds}{ds}$ أوجد في كل مما يأتي :

(٧) $s^4 + 3v^4 - 2 = 0$

(٦) $s^2 - 2v^4 + 7 = 0$

(٩) $s^2 + 6s = v^4 + 3$

(٨) $s^2 - 2s = v^4 - 5$

(١١) $s = v + 5$

(١٠) $1 = \frac{v}{s} + \frac{s}{v}$

(١٣) $s = 2v^2$

(١٢) $s = v + 5$

(١٥) $\frac{3}{4} = s^2 + 2v^2$

(١٤) $s^2 + 2v = 9$

- (١٠) إذا كان $v = 3$ جتا $(2 + 1)$ أثبت أن : $\frac{v^2}{2} + 4v = 0$
- (١١) إذا كان $v = 3$ جتا $v = 3$ جتا v أثبت أن : $\frac{v^2}{2} + 2 + \frac{v}{2} + 4v = 0$
- (١٢) إذا كان $v = 3$ جتا $v = 3$ جتا v أثبت أن : $\frac{v^2}{2} + \frac{v}{2} + 2 + 4v = 0$
- (١٣) إذا كان $v = 3$ قاس أثبت أن : $\frac{v^2}{2} + \frac{v}{2} = (2 - 3v^2)$
- (١٤) إذا كان $\frac{v}{2} = 3 - 2$ ، $\frac{v}{2} = 1 - 2$ أوجد : $\frac{v^2}{2}$ عند $v = 2$
- (١٥) إذا كان $v = 3 - 2$ ، $v = 2 + 2$ أوجد : $\frac{v^2}{2}$ عند $v = 2$
- (١٦) إذا كان $v = \frac{1+2}{1-2}$ ، $v = \frac{1-2}{1+2}$ أثبت أن : $\frac{v^2}{2} = 2$
- (١٧) إذا كان $v = 3$ قاس ، $v = 3$ قاس

تمارين (١ - ٤) من الكتاب المدرسي

(١) إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، أوجد معادلتى المماس والعمودي لمنحنى الدالة ق في كل مما يأتي مستعيناً بالقيم المعطاة في الجدول التالي :

س	د(س)	ر(س)	د'(س)	ق(س)
٣	١	٧	١٠	٦
٧	٢	١	٢	٥

- (أ) ق (س) = د (س) × ر (س) ، س = ٣
- (ب) ق (س) = د (س) ÷ ر (س) ، س = ٧
- (ج) ق (س) = د (س) [ر (س)] ، س = ٣
- (٢) أوجد معادلتى المماس والعمودي لمنحنى الدالة د حيث $v = 3$ عند قيم س المعطاة :

(أ) $v = 3 - 2$ ، س = $\frac{\pi}{4}$ (ب) $v = 2$ جتا س - قاس ، س = $\frac{\pi}{3}$

(٣) أوجد معادلتى المماس والعمودي لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة :

(أ) $v^2 + 52 = 0$ عند النقطة (٤ ، ٦)

(ب) $v^2 + 5 + 7 = 0$ عند النقطة (١٠ ، ١)

(ج) $v^2 + 1 = 8$ عند النقطة (١٠ ، ٢)

(د) (جاس + جتا س) ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{2}$

(٤) أوجد معادلتى المماس والعمودي لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة :

(أ) $s = 2 + 4n$ ، $v = 2n$ عند $n = 1$

(ب) $s = 3\theta$ ، $v = \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{6}$

(٥) إذا كانت النقطة (٤ ، ٢) تنتمي الى المنحنى $s = 2 + 4v - 2v^2$ ك $s = 12 + 0$ أوجد قيمة k ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

(٦) مساحة المثلث : أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى $s = 2 + 4v^2 = 20$ عند النقطة (٢ ، ٢).

(٧) تعامد منحنيين : أثبت أن المنحنيين $(s - 1) + v^2 = 2$ ، $(s + 1) + v^2 = 2$ يتقاطعان على التعامد ، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

تمارين (١ - ٥) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{2}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزداد عند هذه اللحظة بمعدل.

(أ) $\frac{\pi}{4}$ سم/ث (ب) $\frac{\pi}{4}$ سم/ث (ج) $\frac{1}{8}$ سم/ث (د) ٨ سم/ث

(٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم^٣/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^٣ هو : سم/ث.

(أ) $\frac{1}{12}$ (ب) $\frac{1}{12}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{1}{6}$

(٣) جسم يتحرك على المنحنى $s = 2 + 4v^2$ ، إذا كان $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}$ وحدة / ث عند $v = 1$ فإن $\frac{dv}{dt}$ عند هذه اللحظة يساوي وحدة / ث.

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{3}{8}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{3}{2}$

(٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى $v = 3s$ عند نقطة ما $\frac{1}{2}$ وكان الإحداثي السيني لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادي يساوي وحدة / ث.

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{3}{2}$

أجب عما يأتي :

(٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $s^2 + 2s - 4 = 0$ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوي ٤ وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن ن.

(٦) سقط حجر في بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة في نهاية ٥ ثوان.

(٧) صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة، وجد أن معدل تغير طول ضلعها ١ سم/ث، أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم.

(٨) كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة، أنقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢ سم^٣/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم أن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم/سم^٣ عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم^٣. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم^٣.

(٩) يتسرب غاز من بالون كروي بمعدل ٢٠ سم^٣/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره ١٠ سم، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجي للبالون في نفس اللحظة.

(١٠) سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ سم / د عندما يكون الطرف العلوي على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة.

(١١) يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة P على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة B في نفس المستوى الأفقي للنقطة P وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها وتتزايد بمعدل ١٢، ٠ / د، أوجد معدل ارتفاع البالون في هذه اللحظة.

(١٢) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١، ٢ م/ث، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θ عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{S}$ ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣، ٦ متر من قاعدة المصباح.

(١٣) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٢٠ √٣ إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / ساعة، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة.

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان $v = 4$ قاس s فإن $v'(\frac{\pi}{4})$ يساوي :

- (أ) -٨ (ب) صفر (ج) $4\sqrt{2}$ (د) ١٦

(٢) إذا كان $v = 2$ جتا s فإن $v''(\frac{\pi}{3})$ يساوي :

- (أ) -٤ (ب) صفر (ج) $4\sqrt{3}$ (د) ٨

(٣) تتحرك نقطة على المنحنى $s = 12$ ، عند النقطة $(2, 3)$ يكون $\frac{ds}{ds}$ يساوي :

- (أ) -٤ (ب) $-\frac{3}{2}$ (ج) $-\frac{1}{3}$ (د) ٣

(٤) إذا كان $v = 2n^2 + 7$ ، $v' = 4 - n$ ، فإن معدل تغير v بالنسبة إلى n يساوي :

- (أ) ٢٢ (ب) ٣٢ (ج) ٦ (د) ١٢

(٥) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل 2 سم / د ومساحتها بمعدل 20π سم^٢ / د ، فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوي : سم.

- (أ) $\frac{5}{2}$ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٢٠

أجب عما يأتي :

أوجد $\frac{ds}{ds}$ إذا كانت v تساوي :

(أ) $s + 2$ ظتا s .

(د) 2 جتا $(\pi + s)$

(ب) $2\sqrt{s} + 5$ قاس s

(ج) $2 - s$ جتا (πs)

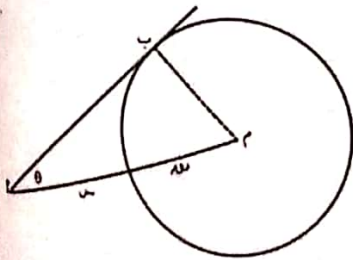
(و) 2 قاس 2 ظا s

(هـ) 2 ظا s ظتا s

(٧) في الشكل المقابل : أ نقطة تتحرك في المستوى ، P مماس للدائرة M عند B ، $P = M = s + n$ حيث n هو طول نصف قطر الدائرة :

(أ) أثبت أن $s = n \cos(\theta - 1)$

(ب) أوجد معدل تغير s بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$



(٨) أوجد $\frac{S}{S}$ في أبسط صورة لكل من :

(ب) $0 = 7 - 2 + 12 + 2S$

(أ) $0 = 9 + 2 - 3 + 2S$

(د) $20 = 2(2+S) + 2(3-S)$

(ج) $14 = 2 - 2S + 2 + S$

(و) $\frac{1}{2} = \text{جا س جتا س}$

(هـ) $0 = \text{س ص} + \text{جا س}$

(٩) (أ) أوجد معدل تغير $(3 + S)(2 - S)$ بالنسبة إلى $\frac{S}{2 + S}$

(ب) إذا كانت $D = (S)$ ، $\frac{2}{1 + S}$ ، $R = (S)$ ، $3 = \text{سأوجد}$ $\frac{S}{S}$ [(د) (ر) (س)] عند $S = 2$

أثبت أن $(0 + S + 2)$ $\frac{S}{2 + S} + \frac{3}{2 + S} = \frac{2S}{2 + S}$

(١٠) (أ) إذا كانت $\sqrt{5 + 2S} = 0$

أثبت أن $S = \frac{2S}{2 + S} + \frac{2}{2 + S} + \frac{2S}{2 + S}$

(ب) إذا كانت : $S = \text{جا } P$ س

(ج) إذا كانت $S = P$ جتا $S + 2$ ب جا $S + 2$ أثبت أن : $S = \frac{2S}{2 + S} - \frac{2S}{2 + S} + \frac{2S}{2 + S}$

(١١) أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة :

(أ) $S - 2 = S + 2 + 3\sqrt{12}$ (٣ ، $\sqrt{3}$)

(ب) $S = 2$ جا $S = \text{جتا } 2$ س $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

(١٢) أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنيات التالية عند القيم المعطاة :

(أ) $S = 2 + 2 + 3 + 6 = 2$ عند $N = 1$

(ب) $S = 1 - \theta$ ، $\theta = \text{طا}$ عند $\frac{\pi}{4} = \theta$

(١٣) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات ، المماس ، العمودي عليه للمنحنى $20 = 2 + 2 + 4$ عند النقطة (١ ، ٤).

(١٤) أثبت أن المنحنيين $9 + 4 = 6$ س ، $2 - 2 = 3$ س متقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل.

(١٥) أثبت أن المنحنى $(\frac{S}{1}) + (\frac{S}{2}) = 2$ ممس المستقيم $\frac{S}{1} + \frac{S}{2} = 2$ عند النقطة (٢ ، ٢) ب

مهما تكن قيمة ن.

(١٦) إذا تحركت نقطة مادية في خط مستقيم وكانت العلاقة بين المسافة والزمن هي $3 = 2 + 3 - 4$ حيث ف بالسنتيمترات ، ن بالثواني. أوجد معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن في نهاية ٣ ثوان.

(١٧) بالون كروي مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم^٣/ث ، أثبت أن معدل نقص مساحته في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره $\frac{2}{\sqrt{3}}$ سم يساوي $\frac{2}{\sqrt{3}}$ سم/ث.

(١٨) نقطة تتحرك على المنحنى $v = 4 - s$ إذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (٤ ، -٤) يساوي ٢ وحدة / ث فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن.

(١٩) مستطيل طوله ٢٤ سم وعرضه ١٠ سم يتناقص طوله بمعدل ٢ سم / ث ، بينما يتزايد عرضه بمعدل ١،٥ سم/ث ، أوجد معدل تغير مساحته بعد مضي ٤ ثوان ، ثم أوجد الزمن الذي تتوقف فيه المساحة عن التزايد. كم تكون مساحة المستطيل حينئذ

(٢٠) سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوي على حائط رأسي بمعدل ك وحدة / ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلي عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية حيث $\theta = \frac{5}{4}$.

(٢١) يتمدد هرم رباعي منتظم من المعدن ارتفاعه يساوي طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم^٣/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوي ٠،١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

(٢٢) سلم طوله ٢،٦ متر يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية. إذا كان طرفه السفلي يتحرك مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ متر / د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط. أوجد معدل تحرك طرفه العلوي ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ.

(٢٣) متوازي مستطيلات أبعاده ٣ ، ٤ ، ١٢ من السنتيمترات إذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢ سم / ث ومعدل تزايد بعده الثاني ١ سم/ث ، ومعدل تناقص بعده الثالث ٣ سم/ث ، فأوجد حجم متوازي المستطيلات في أي لحظة زمنية ن. ومعدل تغير حجمه في نهاية ٢ ثانية.

(٢٤) خزان بترول على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢٤ متراً. يراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م^٣/د ، فما معدل تغير ارتفاع البترول في الخزان ؟

(٢٥) ترتفع طائرة عمودية رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/ث فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض ويبعد ١٥٠ م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد الطائرة عندما تكون على ارتفاع ١٥٠ م من سطح الأرض.

(٢٦) في سباق ١٠٠ متر ، يجري لاعب في مسار مستقيم باتجاه خط النهاية ، وكانت إحدى كاميرات خط النهاية على مسافة ٥ أمتار وعمودية على مسار السباق وفي نفس المستوى الأفقي للمتسابقين. أوجد معدل تغير الزاوية التي تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ومعدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠ م/ث.

(٢٧) تتحرك النقطة P (س ، ص) على منحنى الدالة $v = s^2 + s$ بحيث $\frac{ds}{dt} = 2$ وحدة / ث أوجد معدل التغير في مساحة المثلث P و / ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) في اللحظة التي يكون فيها الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٣.

اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د (س) = ظتا س فإن د' ($\frac{\pi}{4}$) تساوي :

- (أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{4}{9}$ (ج) ٤ (د) $\frac{9}{2}$

(٢) تتحرك نقطة على المنحنى $ص = ٢٥ - ٢س$ بحيث $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٣ + س٢}$ فإن : عند النقطة (٣- ، ٤)

$\frac{ص}{س}$ تساوي :

- (أ) $\frac{١}{4}$ (ب) $\frac{١}{4}$ (ج) $\frac{١}{9}$ (د) ٩

(٣) إذا كان معادلة العمودي للمنحنى $ص = د$ (س) عند النقطة (١ ، ١) هي $س + ٤ = ٥$ فإن د' (١) تساوي :

- (أ) ٣- (ب) $\frac{١}{4}$ (ج) ٤ (د) ٤ -

(٤) المماس للمنحنى $ص = ٣س - ٥$ عند النقطة (١ ، ٢) يمر بالنقطة :

- (أ) (٢- ، ٥) (ب) (١ ، ٣) (ج) (٢ ، ٤) (د) (٠ ، ٨-)

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٥) إذا كانت $س = ٧ - ٢س$ ، $ص = ٧ - ٢س$ أوجد $\frac{ص}{س}$

(٦) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما $س = ٦ - ٢س$ ، $ص = ٨ - ٢س$ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند ن = ٦.

(٧) ب ج مثلث مساحته م ، النقطة ج تتحرك على المستقيم $ص = ٢س$ ، فإذا كان پ (٠ ، ل) ،

ب (٠ ، ك) حيث ل ، ك ثابتان موجبان أثبت أن $\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٢} + \frac{ك}{٢}$

(٨) أوجد معدل تغير $\sqrt{٩ + س٢}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{١ - س}$ عند $س = ٤$

(٩) (أ) إذا كان $ص = ٤ + ظتا س - قا س$ ، أوجد معادلة العمودي عند $س = \frac{\pi}{4}$

(ب) مئمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم ويتزايد بمعدل ٢ سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

(١٠) سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي وبطرفه الآخر على أرض أفقية ، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢٠ سم/ث. احسب معدل هبوط الطرف العلوي للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$.

إذا لم تستطع الإجابة عن احد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتي :

١٠	٩		٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم السؤال
	ب	أ									
٥	٥	٤	٢	٢	٢	٢	٤	٤	٢	٣	ارجع إلى

اختبارات كتاب لامى للمراجعة على (الوحدة الاولى)

الاختبار الأول

السؤال الأول :

(٢) إذا كانت النقطة (٤ ، - ٢) تنتمي إلى المنحنى $س' + ص' - ٢ = ١٢$.

أوجد قيمة $ك$ ، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

(ب) سلم طوله ٢٥٠ سم يستند على حائط رأسي ، فإذا إنزلق الطرف العلوي للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠ سم/ث عندما كان الطرف السفلي للسلم على بعد ٧٠ سم من الحائط . أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض .

السؤال الثاني :

(٢) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

$$(١) \quad ص = قتا (٥س + ٢) \quad (٢) \quad ٣ص = جاس جتا ٢ص$$

$$(ب) \quad (١) \quad \text{أوجد } \frac{وس}{وس} \text{ للمنحنى : } س = قا' - \theta - ١ , ص = ظا \theta \text{ عندما } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(٢) \quad \text{إذا كان } ص = قاس \text{ فأثبت أن : } ص = \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = ص (٣ص - ٢)$$

الاختبار الثاني

السؤال الأول :

(٢) إذا كانت النقطة $(-1, 2)$ تنتمي إلى المنحنى $V = (1 + S)^2$ $= K$ أوجد قيمة K ، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

(٣) بالون كروي يتم ملئه بالغاز فإذا كان معدل الزيادة في حجمه 8π سم^٣/ث عندما كان طول نصف قطره 4 سم . أوجد في هذه اللحظة معدل الزيادة في طول نصف القطر .

السؤال الثاني :

(٢) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

$$(١) \quad V = (7 - 3\sqrt{S})^2 \quad (٢) \quad S \text{ جتا } V + V \text{ جتا } S = 3$$

$$(٣) \quad (١) \quad \text{أوجد } \frac{dV}{dS} \text{ للمنحنى : } S = \sqrt{2 - \sqrt{3}V}, \quad V = \sqrt{1 + \sqrt{4}V} \text{ عندما } V = 2$$

$$(٢) \quad \text{إذا كان } V = S \text{ جتا } S \text{ فأثبت أن : } S \frac{d^3V}{dS^3} + \frac{d^2V}{dS^2} + 2 \frac{dV}{dS} = 0$$

الوحدة الثانية:

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

- ١- الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي
- ٢- مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية
- ٣- تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

اختبارات لامي

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي:

■ مفهوم العدد النيبيري (الطبيعي) ه :

$$ه = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^s \quad \text{أ،} \quad ه = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{s+1}$$

وذلك باستخدام متسلسلة تايلور .

$$\text{أ،} \quad ه = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

➤ نتائج هامة :

$$\begin{aligned} (1) \quad ه^s &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{s \cdot s} \\ (2) \quad ه^{\frac{1}{s}} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{s \cdot \frac{1}{s}} \\ (3) \quad ه^{-s} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{-s} \\ (4) \quad ه^{s+1} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{s+1} \end{aligned}$$

■ بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي :

$$\begin{aligned} (1) \quad لو ه = ص &\Leftrightarrow ه = ص^ه \\ (2) \quad لو ه^س &= س \cdot لو ه \quad \text{حيث } س > 0 \\ (3) \quad لو ه &= 1 \\ (4) \quad لو ه^س &= س \cdot لو ه \end{aligned}$$

■ النهايات واللوغاريتم الطبيعي :

$$\begin{aligned} (1) \quad ه &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{لو ه^{س+1}}{س} \\ (2) \quad ه^س &= \frac{1 - ه^س}{س} \quad \text{حيث } س < 0 \\ (3) \quad ه^س &= \frac{1 - ه^س}{س} \\ (4) \quad ه^س &= \frac{1 - ه^س}{س} \end{aligned}$$

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية:

■ مشتقة الدوال الأسية: $ص = هـ^س$ ، $ص = م^س$:

$$(1) \text{ إذا كانت } ص = هـ^س \text{ فإن: } \frac{ص}{هـ} = هـ^س$$

$$(2) \text{ إذا كانت } ص = م^س \text{ فإن: } \frac{ص}{م} = م^س \cdot لو_م م$$

➤ نتائج هامة :

$$(1) \text{ إذا كانت } ص = هـ^{(س)} \text{ فإن: } \frac{ص}{هـ} = هـ^{(س)} \cdot د'(س)$$

$$(2) \text{ إذا كانت } ص = م^{(س)} \text{ فإن: } \frac{ص}{م} = م^{(س)} \cdot د'(س) \cdot لو_م م$$

■ مشتقة الدوال اللوغاريتمية: $ص = لو_هـ س$ ، $ص = لو_م س$:

$$(1) \text{ إذا كانت } ص = لو_هـ س \text{ فإن: } \frac{ص}{س} = \frac{1}{هـ} ، س > 0$$

$$(2) \text{ إذا كانت } ص = لو_م س \text{ فإن: } \frac{ص}{س} = \frac{1}{م \cdot لو_م م}$$

➤ ملاحظة هامة :

هذه القوانين صحيحة مهما كان قيمة المعامل الموجب لـ س .

➤ نتائج هامة :

$$(1) \frac{د^{-}(س)}{د(س)} = لو_هـ د(س)$$

$$(2) \frac{د^{-}(س)}{د(س) \cdot لو_م م} = لو_م د(س)$$

$$(3) \frac{1}{س} = |س| لو_هـ س ، س \neq 0$$

تكامل الدوال : $ص = ه س$ ، $ص = لو ه س$:

$$(1) \quad \left[ه س . و س = ه س + ث \right]$$

$$(2) \quad \left[\frac{1}{س} . و س = لو ه س + ث ، س \neq 0 \right]$$

➤ نتائج هامة :

$$(1) \quad \left[ه د (س) . د' (س) و س = ه د (س) + ث \right]$$

$$(2) \quad \left[ه س ب + و س . \frac{1}{ب} = ه س ب + ث \right]$$

$$(3) \quad \left[\frac{د (س)}{د (س)} . و س = لو ه س + ث \right]$$

تمارين على الوحدة الثانية

المجموعة الأولى:

➤ مسائل على العدد النيبيري ه

أكمل ما يـأ . :

$$[1] \quad \left[\dots = \lim_{س \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{س} \right)^{س^4} \right]$$

$$[2] \quad \left[\dots = \lim_{س \rightarrow \infty} \frac{س^3}{(س+1)^3} \right]$$

$$[3] \quad \left[\dots = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{ن} + \dots + \dots + \dots = \infty \right]$$

$$[4] \quad \left[\dots = \lim_{س \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{س} \right)^{س+4} \right]$$

$$[5] \quad \left[\dots = \lim_{س \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{س} \right)^{س^2+3} \right]$$

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [٦] نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{\frac{s}{5}} = \dots\dots\dots$ [ه أ، ه ب، ه ج، ه د]

■ [٧] نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} (s+1) = \dots\dots\dots$ [ه أ، ه ب، ه ج، ه د]

■ [٨] نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} (s^3+1) = \dots\dots\dots$ [ه أ، ه ب، ه ج، ه د]

■ [٩] نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} + 1\right)^s = \dots\dots\dots$ [ه أ، ه ب، ه ج، ه د]

■ [١٠] نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1+s}{\left(\frac{3+s}{3-s}\right)} = \dots\dots\dots$ [ه أ، ه ب، ه ج، ه د]

أجب عن الأسئلة الآتية :

■ [١١] أوجد قيمة : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{s} + 1\right)^s$

■ [١٢] أوجد قيمة : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} - 1\right)^{s^2}$

■ [١٣] أوجد قيمة : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{s+1}\right)^{s^2}$

■ [١٤] أثبت أن : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{s+1}\right)^s = \frac{1}{e}$

■ [١٥] أوجد قيمة : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^2+5}{s^2+1}\right)^{s^2+3}$

■ [١٦] أوجد قيمة : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1-s^3}{1+s^3}\right)^{s^3}$

■ [١٧] أثبت أن : نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^s = \frac{1}{e}$

■ [١٨] أثبت أن : $\sqrt[3]{\frac{2+s^3}{1+s^3}} = \sqrt[3]{\frac{2+s^3}{1+s^3}}$ $s \leftarrow \infty$

■ [١٩] أوجد قيمة : $\sqrt[3]{\frac{2+s^3}{1+s^3}}$ $s \leftarrow \infty$

➤ مسائل على النهايات واللوغاريتم الطبيعي :

■ [٢٠] أوجد قيمة : $\frac{\log(1+s)}{1-s^3}$ $s \leftarrow \infty$

■ [٢١] أوجد قيمة : $\frac{\log(1+s) \times 8}{1-s^2}$ $s \leftarrow \infty$

■ [٢٢] أوجد قيمة : $\frac{1-s^4}{\log s}$ $s \leftarrow \infty$

■ [٢٣] أوجد قيمة : $\frac{1-s^3}{\log 2}$ $s \leftarrow \infty$

■ [٢٤] أثبت أن : $\frac{1-s^p}{s} = \log p$ حيث $p < 0$ $s \leftarrow \infty$

■ [٢٥] أوجد قيمة : $\frac{1-s^{2p}}{s}$ $s \leftarrow \infty$

■ [٢٦] أثبت أن : $\lim_{s \rightarrow \infty} [\log(1+s) - \log s] = 1$

المجموعة الثانية :

➤ مسائل على مشتقة الدوال الضمنية

أكمل ما يأتي :

■ [١] إذا كانت $8x^2 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ فإن $\frac{ds}{dx} = \dots$

■ [٢] إذا كانت $8x^2 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ فإن $\frac{ds}{dx} = \dots$

■ [٣] إذا كانت ص = - ه جاس فإن $\frac{ج ص}{ج س} = \dots\dots\dots$

■ [٤] إذا كانت ه س + ه ص = ه س + ص فإن $\frac{ج ص}{ج س} = \dots\dots\dots$

■ [٥] إذا كانت ص = $\frac{١ + ه س}{١ - ه س}$ فإن $\frac{ج ص}{ج س} = \dots\dots\dots$

أختار الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [٦] $\left[\begin{array}{l} ه٥ س . ج س = \dots\dots\dots \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{l} \frac{١}{٥} ه س + ث أ , ه٥ س + ث أ , \frac{١}{٥} ه س أ , ه٥ ه س \end{array} \right]$

■ [٧] إذا كانت ص = ه - $\frac{١}{٢} س$ فإن : ص + ٢ ص' = $\dots\dots\dots$

$\left[\begin{array}{l} ٣ ه - \frac{١}{٢} س أ , ٣ أ , ه - \frac{١}{٢} س أ , صفر \end{array} \right]$

■ [٨] إذا كانت ص = ه س' فإن : $\frac{ج ص}{ج س} - س (٢ \frac{ج ص}{ج س} + ص) + ٤ = \dots\dots\dots$

$\left[\begin{array}{l} ٢ س ه س' أ , ٤ أ , س ه س' + ٤ س ه س' أ , صفر \end{array} \right]$

■ [٩] إذا كانت ص = ه٣ س' فإن : $\frac{٥ ص}{٦ س ص} = \dots\dots\dots$

$\left[\begin{array}{l} ٥ أ , ٦ أ , ٣٠ أ , ٦ ه٣ س' \end{array} \right]$

■ [١٠] إذا كانت ص = ه٣ س' فإن : $\frac{ص}{٦ ص " ه٥} = \dots\dots\dots$

$\left[\begin{array}{l} ١ أ , س أ , ٦ س أ , ٦ \end{array} \right]$

■ [١١] إذا كانت ص = س' . ٣ س فإن : س ص' - ٢ ص = $\dots\dots\dots$

$\left[\begin{array}{l} ص (٢ + س لو ه٣) أ , س ص لو ه٣ أ , صفر أ , س' لو ه٣ ٣ \end{array} \right]$

■ [١٢] $\frac{ج}{ج س} = (٧ ه جا٢ س - س) = \dots\dots\dots$

$\left[\begin{array}{l} ٧ جتا٢ س . ه جا٢ س أ , ٧ جتا٢ س . ه جا٢ س - ١ \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{l} ١٤ جتا٢ س . ه جا٢ س - ١ أ , ١٤ جا٢ س . ه جتا٢ س - ١ \end{array} \right]$

■ [١٣] $\frac{٥}{٥س} = (٧هـ) \dots\dots\dots$

[٧هـ ٧ أ، ٧هـ ٧ أ، ٧هـ ٧ أ، صفر]

■ [١٤] إذا كانت س^٢ = هـ ص + ٣ ص فإن $\frac{٥ص}{٥س} = \dots\dots\dots$

[$\frac{٣س-٥هـ}{٣}$ أ، $\frac{٣س}{٣+٥هـ}$ أ، $\frac{٣س}{٣+٥هـ}$ أ، $\frac{٣س}{٣+٥هـ}$]

أجب عن الأسئلة الآتية :

■ [١٥] إذا كانت : ص = هـ س^٣ فأوجد : ص'.

■ [١٦] أوجد $\frac{٥ص}{٥س}$ حيث ص = س^٣ . هـ س^٢

■ [١٧] أوجد $\frac{٥ص}{٥س}$ حيث ص = هـ جا س^٢ .

■ [١٨] إذا كانت د (س) = هـ (س + لو هـ س) . فأوجد : د' (س) .

■ [١٩] أوجد $\frac{٥ص}{٥س}$ حيث ص = هـ س^٣ + [هـ س] .

■ [٢٠] إذا كانت د (س) = جا هـ س^٥ فأوجد : د' (س) .

■ [٢١] إذا كانت د (س) = هـ س⁻ فأوجد : د (س) + د' (س) + د'' (س) + د''' (س) .

في المسائل من (٢٢) إلى (٤٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة :

■ [٢٢] هـ س^٧ ■ [٢٣] هـ س^٢

■ [٢٤] س . هـ س^٣ ■ [٢٥] هـ س^٢

■ [٢٦] س^٢ . هـ س^٥ ■ [٢٧] هـ س جا س

■ [٢٨] جا هـ س ■ [٢٩] هـ س جتا س

■ [٣٠] هـ جا س ، س ≠ ط ، ط ∋ ص

■ [٣١] س^٧ ■ [٣٢] س^٣

$$\sqrt{s^2 h + s^4} \quad [34] \blacksquare$$

$$\frac{1}{2} (h s - s - s) \quad [36] \blacksquare$$

$$9 \sqrt{s} \quad [38] \blacksquare$$

$$2 \text{ جا } s \quad [40] \blacksquare$$

$$\pi (s^2 h + 1) \quad [42] \blacksquare$$

$$[33] \blacksquare \quad \text{جا } s^2 - \text{هـ جا } s^2$$

$$[35] \blacksquare \quad \text{هـ } \sqrt{s^2 + 1}, s \leq \frac{1}{2}$$

$$[37] \blacksquare \quad p. \text{ هـ ب س} + \text{ج هـ و س}$$

$$[39] \blacksquare \quad 8 (s^2 + 1)$$

$$[41] \blacksquare \quad \pi s$$

$$[43] \blacksquare \quad \text{إذا كانت د (س) = هـ}^n$$

(أولاً) أثبت أن : د' (س) - هـ . د (س) = صفر

(ثانياً) أوجد قيمة هـ التي تحقق المعادلة : د'' (س) - د' (س) = 6 د (س)

$$[44] \blacksquare \quad \text{إذا كانت ص} = s^2 + \text{هـ}^2 \text{ فأوجد } \frac{ص}{هـ}$$

المجموعة الثالثة :

➤ مسائل على مشتقة الدوال اللوغاريتمية

أكمل ما يأتي :

$$[1] \blacksquare \quad \frac{s}{\text{و س}} (\text{لو هـ س})^2 = \dots$$

$$[2] \blacksquare \quad \frac{s}{\text{و س}} (\text{لو هـ س})^3 = \dots$$

$$[3] \blacksquare \quad \frac{s}{\text{و س}} (\text{لو هـ}^2 \text{ س}) = \dots$$

$$[4] \blacksquare \quad \frac{s}{\text{و س}} (\text{لو هـ} (s + 1)) = \dots$$

$$[5] \blacksquare \quad \text{إذا كانت ص} = \text{لو هـ} (s + 4) \text{ فإن ص}' = \dots$$

$$[6] \blacksquare \quad \frac{s}{\text{و س}} (\text{لو هـ} (s^3 - 3s + 2)) = \dots$$

■ [٧] إذا كانت $\frac{1}{3} = \text{ص}$ لو $(س^3 - 3س - ٧)$ فإن $\text{ص}' = \dots\dots\dots$

■ [٨] إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}$ لو $(س^3 - 3س + ٢)$ فإن $\frac{٤}{س} (\text{هـ ص}) = \dots\dots\dots$

■ [٩] إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}$ لو $|س^2 - س + ١|$ فإن $\frac{٤س}{س} = \dots\dots\dots$

■ [١٠] إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}$ لو $(\frac{٣-س}{١+س})$ فإن $(س^2 - ٢س - ٣) \frac{٤س}{س} = \dots\dots\dots$

■ [١١] إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}$ لو $\frac{١}{١+س^2}$ فإن $\frac{٤س^2}{س^2} = \dots\dots\dots$

■ [١٢] إذا كانت $\text{ص} = \text{هـ} - س$ لو $٦س^٥$ فإن $\text{ص} + \text{ص}' = \dots\dots\dots$

■ [١٣] إذا كانت $\text{ص} = س$ فإن $\frac{٤س}{س} = \dots\dots\dots$

أختار الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [١٤] إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}$ لو $(س^3 - ٥)$ فإن $\frac{\text{ص}}{س^6} = \dots\dots\dots$

[$\frac{١}{س^3 - ٥}$ ، $\frac{١}{٥ - س^3}$ ، $(س^3 - ٥) \text{ لو}$ ، $\frac{١}{س^3 - ٥}$]

■ [١٥] إذا كانت $\text{ص} = (\text{لو}) (س + ٣)$ فإن $\frac{\text{ص} (س + ٣)}{(س + ٣) \text{هـ}} = \dots\dots\dots$

[صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

■ [١٦] إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}$ لو $(س + ٣)$ فإن $(س + ٣) \text{ص}' = \dots\dots\dots$

[صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

■ [١٧] إذا كانت $\text{ص} = (س + ٣) \text{ لو}$ لو $(س + ٢)$ فإنه عند $س = ١$ تكون قيمة

المقدار : $\text{ص}' - \frac{٢س}{س + ٢}$ تساوى $\dots\dots\dots$

[$\frac{٨}{٣}$ ، ٨ ، $\frac{٨}{٣} + ٣$ ، $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣} + ٣$]

■ [١٨] $\frac{س}{وس} = (لو ه جا ٣ س) = \dots\dots\dots$

[٣ جتا ٣ س ا، ٣ ظنا ٣ س ا، ٣ ظنا س ا، ٣ جاس]

■ [١٩] إذا كانت د (س) = لو ه $\frac{س^٤}{٢(٤-س٣)}$ فإن د' (١) = $\dots\dots\dots$

[٨ ا، ٩ ا، ١٠ ا، ١١]

■ [٢٠] إذا كانت د (س) = لو ه $(س \sqrt{١+س^٢})$ فإن د' (٢) = $\dots\dots\dots$

[١٠ ا، ٩، ١٠، ١ ا، ٩]

■ [٢١] إذا كانت ص = لو ه $\sqrt{١-٢س}$ فإن $\frac{ص}{٢(١-ص)}$ = $\dots\dots\dots$

[١ ا، ١ ا، ١ - ا، ١ - ا]

في التمارين من (٢٢) إلى (٤٦) أوجد $\frac{س}{وس}$:

■ [٢٢] ص = جتا س + لو ه س ■ [٢٣] ص = س + لو ه س

■ [٢٤] ص = (س + ٣) لو ه س ■ [٢٥] ص = س' لو ه س

■ [٢٦] ص = لو ه س' ■ [٢٧] ص = لو ه (س' + س٢)

■ [٢٨] ص = لو ه (س٣ - ٥ س + ٣) ■ [٢٩] ص = لو ه (لو ه س٣)

■ [٣٠] ص = (س' + س٢) لو ه (س' + س٢)

■ [٣١] ص = $\frac{س}{لو ه س}$ ■ [٣٢] ص = (س٣ + ٥) س

■ [٣٣] ص = (جاس) ظاس ■ [٣٤] ص = (جاس) س

■ [٣٥] ص = س' س ■ [٣٦] ص' = س٣ × س٢

$$[37] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{س}^2 \text{ لو}^2 \text{ س}^2 \quad [38] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 (\text{س}^2 + 2)$$

$$[39] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 \text{ س}^2 + (\text{لو}^2 \text{ س}^2) \quad [40] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 \sqrt[3]{7 + \text{س}^2}$$

$$[41] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 \sqrt{\frac{\text{س}^2 + 4}{\text{س}^2 - 4}} \quad [42] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 \text{ س}^2 + \frac{1}{\text{لو}^2 \text{ س}^2}$$

$$[43] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 \text{ ظا}^2 \text{ س}^2 \quad [44] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{جتا}^2 (\text{لو}^2 \text{ س}^2)$$

$$[45] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 (\text{ظتا}^2 \text{ س}^2) \quad [46] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 (\text{لو}^2 \text{ قا}^2 \text{ س}^2)$$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم س المقابلة لكل منها :

$$[47] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 \text{ س}^2 \quad , \quad \text{س} = 2$$

$$[48] \blacksquare \quad \text{ص} = 3 \text{ لو}^2 (\text{س}^2 - 1) \quad , \quad \text{س} = 1$$

$$[49] \blacksquare \quad \text{ص} = 4 (\text{لو}^2 \text{ س}^2) \quad , \quad \text{س} = 3$$

$$[50] \blacksquare \quad \text{ص} = \text{لو}^2 (\text{س}^2 - 3) \quad , \quad \text{س} = 1$$

$$[51] \blacksquare \quad \overline{P} \text{ مماس للمنحنى } \text{ص} = \text{لو}^2 \frac{\text{س}}{2} \text{ في النقطة ج التي إحداثيها السيني } = 1 , \text{ ويقطع}$$

محور السينات في النقطة (P) ، ومحور الصادات في النقطة (ب) . أوجد طول P ب .

$$[52] \blacksquare \quad \text{إذا كان العمودى للمنحنى } \text{ص} = \text{لو}^2 \text{ س}^2 \text{ عند النقطة } P (1 , \text{لو}^2) \text{ يقطع محور}$$

السينات في النقطة (ب) . أوجد طول P لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

$$[53] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } \text{ص} = \text{ه}^{-\text{س}} \sqrt{\frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}} \text{ فأثبت أن : } (1 - \text{س}^2) \frac{\text{و} \text{ص}}{\text{و} \text{س}} = \text{س}^2 \text{ ص}$$

$$[54] \blacksquare \quad \text{إذا كانت } \text{ص} = P \text{ ه}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} \text{ فأثبت أن } \text{س} \text{ ص} + \frac{\text{و} \text{ص}^2}{\text{و} \text{س}^2} - \text{س} \left(\frac{\text{و} \text{ص}}{\text{و} \text{س}} \right)^2 = 0$$

➤ مسائل على تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

أكمل ما يأتي :

■ [١] $\int (ه^٢ + ه - ه^٢) . و س = [٢] \int (١ + ه - ه^٣) . و س =$

■ [٣] $\int ه^٣ . و س = [٤] \int (١ - ه^٢ - ه^٢) . و س =$

■ [٥] $\int ه^٥ . و س = [٦] \int ه^٢ . و س =$

■ [٧] $\int - ه^٢ . و س = [٨] \int \frac{و س}{س} =$

■ [٩] $\int ه^لو ه . و س = [١٠] \int ه^لو ه (س + ٢) . و س =$

أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

■ [١١] $\int \frac{ه^س}{١٣ + ه^س} . و س = + ث$

[لو ه | ه^س | ، لو ه ه^س ، لو ه (ه^س + ١٣) ، لو ه | ه^س + ١٣]

■ [١٢] $\int ه^س + ه^س . و س = + ث$

[ه^س ، ه^س ، ه^س + ه^س ، ه^س + ١]

■ [١٣] $\int ه^س (٢ + لو ه س) . و س = + ث$

[$\frac{١}{٣} ه^س$ ، $\frac{٢}{٣} ه^س$ ، $\frac{٢}{٣} ه^س (٢ + لو ه س)$ ، $\frac{٢}{٣} ه^س (٢ + لو ه س)$]

■ [١٤] $\int ه^س + ه^٥ . و س = + ث$

[ه^س ، $\frac{١}{٥} ه^س + ه^٥$ ، $\frac{١}{٥} ه^س + ه^٥$ ، $\frac{١}{٥} ه^س + ه^٥$]

■ [١٥] ٦ هـ س. س = + ث

[٣ هـ س. ، ٦ هـ س. ، ٣ هـ س. ، ٢ هـ س.]

■ [١٦] ١ هـ س. س = + ث

[- هـ (- س -) ، - هـ (س +) ، ١ هـ س. ، ٥ هـ س.]

■ [١٧] ٣ هـ س. س = + ث

[٣ هـ س. ، ٣ هـ س. ، ٣ - هـ س. ، ٣ - هـ س.]

■ [١٨] ٣ هـ س. س = + ث

[٣ - هـ س. ، ٣ هـ س. ، ٢ هـ س. ، ٣ - هـ س.]

■ [١٩] ٣ هـ لو هـ س. س = + ث

[١ هـ س. ، ١ هـ س. ، ٣ هـ لو هـ س. ، ٣ هـ لو هـ س.]

■ [٢٠] إذا كانت $\frac{ص}{س} = ٢$ هـ لو هـ س. س فإن [ص. س = + ث

[١ هـ س. ، ١ هـ س. ، ٣ هـ س. ، ٣ هـ س.]

■ [٢١] ٧ هـ س. س =

[١ هـ س. ، ١ هـ س. ، ١ هـ س. ، ١ هـ س.]

■ [٢٢] ١٣ هـ س. س =

[١٣ هـ ، ١٣ هـ س. ، ١٣ هـ ، صفر]

$$[23] \quad \left[\text{هـ}^3 \text{س}^2 + \text{لوه}^3 \text{س} = \text{س}^2 + \dots \right]$$

$$\left[\frac{1}{3} \text{هـ}^3 \text{س}^2, \frac{1}{3} \text{هـ}^3 \text{س}^2, \frac{1}{3} \text{هـ}^3 \text{س}^2 + \frac{1}{6} \text{س}^2, \frac{1}{6} \text{هـ}^3 \text{س}^2 \right]$$

$$[24] \quad \left[\text{هـ}^7 \text{س}^3 + \text{لوه}^2 \text{س} = \text{س}^2 + \dots \right]$$

$$\left[\frac{1}{3} \text{هـ}^3 \text{س}^2, \frac{1}{9} \text{هـ}^3 \text{س}^2, \frac{1}{6} \text{هـ}^3 \text{س}^2, \frac{1}{9} \text{هـ}^3 \text{س}^2 \right]$$

أوجد التكاملات الآتية :

$$[25] \quad \left[(2 \text{هـ}^5 \text{س} + \text{ب}^4 \text{هـ}^4 \text{س}) \cdot \text{س}^2 \right]$$

$$[27] \quad \left[(2 \text{هـ}^3 \text{س} + \text{ب}^2 \text{هـ}^2 \text{س}) \cdot \text{س}^2 \right]$$

$$[29] \quad \left[(1 - \text{س}) \text{هـ}^2 - \text{س}^2 + 1 \cdot \text{س} \right]$$

$$[30] \quad \left[\frac{1}{\text{هـ}^2 \text{لوه}^2 \text{س}} \right]$$

$$[32] \quad \left[\frac{1 + \text{س}^3}{1 + \text{س}^2 + \text{س}^4} \right]$$

$$[34] \quad \left[\frac{\text{قاس}^2}{\text{س}^2 - \text{ظاس}} \right]$$

$$[36] \quad \left[\frac{\text{هـ}^2 \text{س}}{\text{س}^2 + 1} \right]$$

$$[38] \quad \left[(1 - \text{جاس}) \cdot \text{س}^2 \right]$$

$$[39] \quad \left[\frac{\text{هـ}^2}{1 + \text{س}^2} \right]$$

$$[40] \quad \left[\text{س}^2 \text{هـ}^2 (1 + \text{س}^2) \right]$$

$$[41] \quad \left[\frac{\text{جتا} (3 + 5 \text{ لوہ} 9 \text{ س})}{7 \text{ س}} \cdot \text{س} \quad [42] \quad \left[(\text{ہ} - \text{س} + \text{جتا} 2 \text{ س} + 1) \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[43] \quad \left[2 \text{ س}^2 + \text{جتا} \text{س} \cdot (2 - \text{جا} \text{س}) \cdot \text{س} \right]$$

$$[44] \quad \left[\text{قاس} \text{ظا} \text{س} \cdot \text{ہ} + 5 + 2 \text{ قاس} \cdot \text{س} \quad [45] \quad \left[\frac{1}{\text{س}^2} \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[46] \quad \left[\text{ہ} + 1 \text{ جتا} \text{س} \cdot \text{جا} \text{س} \cdot \text{س} \quad [47] \quad \left[\frac{2}{\text{س}^3} \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[48] \quad \left[\frac{\text{ہ} + 3 \text{ س}^2}{\text{س}} \cdot \text{س} \quad [49] \quad \left[\frac{\text{ہ} + 1 \sqrt{1 - \text{س}}}{1 - \text{س}} \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[50] \quad \left[(\text{ہ} - \text{س} + \text{س}^2) \cdot \text{س} \quad [51] \quad \left[\text{ہ}^2 \text{س} \cdot \text{قا}^2 (\text{ہ} - \text{س} - 1) \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[52] \quad \left[5 \text{ ہ}^2 \text{س} \cdot \text{ہ} + 1 \text{ ہ}^2 \text{س} \cdot \text{س} \quad [53] \quad \left[\frac{\text{ہ} \sqrt{3 - \text{س}}}{\text{س}} \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[54] \quad \left[\frac{\text{س}^2 + 3 \text{ س}}{1 + \text{س}^2 + \text{س}^4} \cdot \text{س} \quad [55] \quad \left[\frac{\text{س}^3 \text{ہ}^2 \text{س}}{7 + \text{س}^3} \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[56] \quad \left[\frac{7 \text{ قتا}^2 \text{س}}{13 - \text{ظتا} \text{س}} \cdot \text{س} \quad [57] \quad \left[\frac{\text{س} - \frac{1}{\text{جا} \text{س}}}{\text{س}^2 + \text{جتا} \text{س}} \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[58] \quad \left[\frac{3 \text{ ہ}^2 \text{س}}{3 + \text{ہ}^2 \text{س}} \cdot \text{س} \quad [59] \quad \left[\left(6 \text{ س}^2 + \frac{\text{س} - 3}{\text{س}^3 - \text{ہ}^2 \text{س}} \right) \cdot \text{س} \right] \right]$$

$$[60] \quad \left[\text{إذا كانت ص} = 7 \text{ ہ}^2 \text{س} \text{ فأوجد} \quad \left[\text{ص} \cdot \text{س} \right] \right]$$

تمارين (١-٢) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نها $(\frac{1}{s} + 1)$ s^2 يساوي :
 $\infty \leftarrow s$

- (١) (ب) ٢ (ج) هـ (د) هـ^٢

(٢) نها $(\frac{1}{s^3} + 1)$ s^3 يساوي :
 $\infty \leftarrow s$

- (١) (ب) هـ^٣ (ج) هـ^{١/٣} (د) هـ^{٥/٢}

(٣) نها $\frac{2-s}{s^3}$ s^3 يساوي :
 $\infty \leftarrow s$

- (١) (ب) $\frac{1}{s}$ لو^٢ (ج) $\frac{2}{s}$ لو^٢ (د) $\frac{2}{s}$ لو^٣

(٤) نها $\frac{لوس}{1-s}$ $s \rightarrow 1$ يساوي :
 $\infty \leftarrow s$

- (١) (ب) ١ (ج) هـ (د) هـ^١

(١) صفر

أوجد :

(٦) نها $(\frac{1}{1+s} + 1)$ $s \rightarrow \infty$

(٥) نها $(\frac{1}{s} + 1)$ $s \rightarrow \infty$

(٨) نها $(\frac{s+7}{s+3})$ $s \rightarrow \infty$

(٧) نها $(\frac{1}{s^2} + 1)$ $s \rightarrow \infty$

(١٠) نها $(\frac{لوس(1+s^2)}{s^2})$ $s \rightarrow \infty$

(٩) نها $(\frac{لوس(1+2s)}{s})$ $s \rightarrow \infty$

أوجد النهايات الآتية :

$$(12) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1-s}{s} \text{ نها}$$

$$(11) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{s} + 1 \right) \text{ نها}$$

$$(14) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (1 + 3s^2) \text{ نها}$$

$$(13) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1-s^2}{s} \text{ نها}$$

$$(16) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(1+s^3)s^2}{s^2} \text{ نها}$$

$$(15) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1-s^2}{1+s^2} \right) \text{ نها}$$

تمارين (٢ - ٢) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د (س) = هـ^٣ فإن د' (س) تساوي :

- (أ) هـ^٣ (ب) ٣ هـ^٣ (ج) ٩ هـ^٣ (د) ٣ هـ^٣

(٢) إذا كان د (س) = ٩ هـ^٣ فإن د' (٢-) تساوي :

- (أ) د(٢) (ب) د'(٢) (ج) د(٢-) (د) د(٢-)

(٣) منحنى الدالة د : د (س) = ١ + لير (س - ٢) هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = لير س

بالانتقال :

- (أ) (٢، ١) (ب) (١، ٢-) (ج) (١، ٢-) (د) (١، ٢)

(٤) النسبة بين ميل مماس المنحنى ص = لير^٣ + ١ وميل مماس المنحنى ص = لير^٥

√(١ + س) عند س = ٩ كنسبة

- (أ) ٥ : ٣ (ب) ٣ : ٥ (ج) ١ : ١ (د) لير^٣ : لير^٥

أوجد المشتقة الأولى لكل من :

(٥) ص = هـ^٣

(٦) ص = هـ^٣ - ١

(٧) ص = (١ - س^٣)^٢

(٨) ص^٢ = هـ^٣ - ٢

(٩) ص = لير (٢ - س^٧)

(١٠) ص = لير (١/٢ س^٢ + س)

(١٢) ص = س^٢ لير س

(١٣) ص = لير^٢ (٩ + س^٤)

(١١) ص = لير^٢ / (٧ + س)

$$(14) \text{ ص} = \frac{\text{ه}^2}{\text{لوس}} \quad (15) \text{ ص} = \text{قا ه}^3 \quad (16) \text{ ص} = 2 \text{ ه}^3 - 5 \text{ لوس} \quad \frac{\text{س}}{5}$$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة :

$$(17) \text{ ص} = \sqrt{\text{س} - 2 \text{ ه}^3} \quad \text{س} = \frac{1}{4}$$

$$(18) \text{ ص} = 3 \text{ لوس} - 2 \text{ س} \quad \text{س} = 2$$

$$(19) \text{ ص} = \frac{1}{4} \text{ ه}^3 - 2 \text{ لوس} \quad \text{س} = \frac{1}{2}$$

أوجد $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ لكل مما يأتي :

$$(20) \text{ ص} = \text{ه}^3 = 2 \quad (21) \text{ س لوس} = 58 \quad (22) \text{ ص} = \text{س لوس}$$

$$(23) \text{ ص} = \text{ه}^3 \quad (24) \text{ ص} = \text{ه}^3 \text{ س} \quad (25) \text{ ص} = \text{س} = \frac{1}{\text{س}}$$

أوجد $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}$ لكل مما يأتي :

$$(26) \text{ س} = \text{ه}^2 \text{ ن}^2 \text{ ، ص} = \text{ن}^2$$

$$(27) \text{ س} = 6 \text{ لوس} \text{ ن} \text{ ، ص} = \text{ن}^2$$

أجب عن كل ما يأتي :

$$(28) \text{ إذا كانت ص} = \text{س}^2 \text{ لوس} \quad \frac{\text{س}}{1} \text{ فأوجد } \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^3} \text{ عند س} = 4$$

$$(29) \text{ إذا كانت ه}^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{س}^n}{n!} \text{ (مفكوك تايلور) أثبت أن : } \frac{\text{س}}{\text{س}} = (\text{ه}^3) = \text{ه}^3$$

$$(30) \text{ إذا كانت ص} = \frac{\sqrt{1 + 2 \text{ س}}}{1 - 2 \text{ س}} \text{ أثبت أن (س - 4) ص}^2 + 2 \text{ س ص} = 0$$

(31) أوجد قيم س التي يكون عندها مماس المنحنى $\text{ص} = 9 \text{ س}^3 - 8 \text{ لوس}$ موازياً لمحور السينات.

(32) أوجد معادلة العمودي للمنحنى $\text{ص} = 3 \text{ ه}^3$ عند نقطة واقعة عليه وإحداثياتها السيني يساوي 1.

(٣٣) الربط بالصناعة : إذا كان الإنتاج اليومي لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يوماً) يتبعين بالعلاقة
 $v = 400 = (1 - 0.3^n)$ وحدة أوجد معدل التغير في عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن في
 اليوم العاشر.

(٣٤) تطبيقات حياتية : إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطى بالعلاقة :

$v = (100 + 100t) - 5t^2$ جرام بدلالة عدد الأيام ن. أوجد معدل تغير إنتاج الخلية عند

$t = 0, 10, 20$. هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص ؟

تمارين (٢ - ٣) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان د''(س) = $\frac{1}{2} [3 - 3s + 3s^2]$ ، د'(٠) = ١ ، د'(٠) = ٠ فإن د(س) تساوي :

(أ) د'(٠) - د'(س) (ب) د'(٠) (ج) -د''(س) (د) د''(س)

(٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي $4 - 3s$ ، د'(٠) = ٢ فإن د(٢) تساوي :

(أ) ٤ (ب) ٤ - ٤ (ج) ٢ - ٤ (د) ٢ - ٤

(٣) إظهار $5s^2 \theta$ تساوي

(أ) $| \theta | + \theta$ (ب) $| \theta | + \theta$

(ج) $| \theta | + \theta$ (د) $| \theta | + \theta$

(٤) $[4s - 3s^2]$ س تساوي

(أ) $\frac{1}{2} [4s - 3s^2] + \theta$ (ب) $[4s - 3s^2] + \theta$

(ج) $2 [4s - 3s^2] + \theta$ (د) $4 [4s - 3s^2] + \theta$

أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

(٦) $\int (3s^2 + 2s - 3) ds$

(٥) $\int 3s^4 ds$

(٨) $\int 3s^{-1} ds$

(٧) $\int \left(\frac{4}{s} - 3s \right) ds$

$$(10) \left[\frac{2s^2 - (1+s)s^2}{s^2} \right]$$

$$(9) \left[\frac{7}{3} s^2 - s^4 \right]$$

$$(12) \left[\frac{s^2 - s^{1+2}}{s} \right]$$

$$(11) \left[\frac{s^2 + s^2 + s^2}{s} \right]$$

$$(14) \left[\frac{s}{1-s^4} \right]$$

$$(13) \left[\frac{s^2}{1+s^2} \right]$$

$$(16) \left[\frac{s^2}{s^2} \right]$$

$$(15) \left[\frac{s}{1+s^2} \right]$$

$$(18) \left[\frac{s}{1+s} \right]$$

$$(17) \left[\frac{s}{1+s} \right]$$

$$(20) \left[\frac{1}{(s^2 - 1)} \right]$$

$$(19) \left[\frac{s}{1-s} \right]$$

$$(22) \left[\frac{s^2}{s} \right]$$

$$(21) \left[\frac{s^2}{(1+s)^2} \right]$$

$$(24) \left[\frac{s^2 - 5}{s^2 - 5s + 1} \right]$$

$$(23) \left[\frac{s^2}{1-s^3} \right]$$

$$(26) \left[\frac{s^4}{s^3} \right]$$

$$(25) \left[\frac{s^2 + s^2}{s^2} \right]$$

$$(27) \left[\frac{(1+s)^2}{s} \right]$$

(28) تطبيقات هندسية : إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س ، ص) يساوي

$$2 - \frac{1}{s^2} \text{ ، د (0) = 1 أوجد د (3) .}$$

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) منحني الدالة د حيث د (س) = هـ^{٣-٢} + ٢ هو نفس منحني ر (س) = هـ^٣ بانتقال :

(أ) (٣، ٢) (ب) (٢، ٣) (ج) (٣، -٢) (د) (٢، ٣)

(٢) إذا كان د' (س) = س د (س)، د (٣) = ٥- فإن د' (٣) تساوي :

(أ) ٥٠- (ب) ٤٠- (ج) ١٥ (د) ٢٧

$$(٣) \left[\frac{\text{لوس}^2}{\text{لوس}} \right] \text{ س تساوي :}$$

(أ) $\frac{\text{س}}{٢} + \text{ث}$ (ب) $\frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$ (ج) ٢ س + ث (د) لوس | س | + ث

$$(٤) \left[\frac{١}{\text{س لوس}^3} \right] \text{ س تساوي :}$$

(أ) ٣ لوس | س | + ث (ب) ٣ لوس | لوس | + ث

(ج) $\frac{١}{٣} \text{ لوس | س |} + \text{ث}$ (د) $\frac{١}{٣} \text{ لوس | لوس |} + \text{ث}$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(٥) لو (س - ٣) = ٢ (٦) لو (٧ + س) = ٥ (٧) هـ^{١٠+٥} = ٢٠

(٨) لوس^{١٠+٢} = ٥٠ (٩) لوس هـ^٣ = ٢ لوس^٣ (١٠) ٢٥ = ٣٧

أوجد كلاً من النهايات التالية :

(١١) نها $\left(\frac{٢}{\text{س}} + ١ \right)$ نها (١٢) $\left(\frac{\text{س}}{١ + \text{س}} \right)$

(١٣) نها $\left(\frac{١ - \text{س}^٢}{١ + \text{س}^٢} \right)$

أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل من :

$$(10) \text{ ص} = \text{هـ} \cdot 2 + 1$$

$$(14) \text{ ص} = 7 \cdot \text{هـ} - 3$$

$$(17) \text{ ص} = \text{لو} \cdot (3 + 2)$$

$$(16) \text{ ص} = 2 \cdot \text{هـ} - 2$$

$$(19) \text{ ص} = \text{هـ} \cdot \text{لو} \cdot (1 + 2)$$

$$(18) \text{ ص} = \text{لو} \cdot 2$$

$$(21) \text{ ص} = 2 \cdot \text{لو} \cdot \text{هـ}$$

$$(20) \text{ ص} = \frac{\text{هـ}}{1 + \text{س}}$$

$$(22) \text{ ص} = \frac{1}{\text{لو} \cdot \text{س}}$$

أوجد $\frac{ص^2}{س}$ لكل مما يأتي :

$$(24) \text{ س} = 2 \cdot \text{ن} , \text{ ص} = 4 \cdot \text{لو} \cdot \text{ن}$$

$$(23) \text{ س} = \text{هـ} \cdot 2 \cdot \text{ن} , \text{ ص} = \text{هـ} \cdot 3 \cdot \text{ن}$$

أوجد $\frac{ص^3}{س}$ لكل مما يأتي :

$$(27) \text{ ص} = \text{لو} \cdot \text{س}$$

$$(26) \text{ ص} = \text{س} \cdot 2 + \text{هـ} \cdot 2$$

$$(25) \text{ ص} = \text{لو} \cdot \text{س}$$

$$(28) \text{ إذا كان } \text{هـ} \cdot \text{س} = 2 \cdot \text{س} + \text{ص} \text{ أثبت أن : } (\text{س} \cdot \text{هـ} \cdot \text{س} - 1) \cdot \text{ص} = 2 \cdot \text{س} - \text{ص} \cdot \text{هـ} \cdot \text{س}$$

$$(29) \text{ إذا كانت } \text{س} \cdot 2 = \text{ص} \cdot 1 \text{ ب لوـ س أثبت أن : } \text{س} \cdot 2 \cdot \text{ص} + 5 \cdot \text{س} \cdot \text{ص} + 4 \cdot \text{ص} = 0$$

أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي :

$$(31) \text{ ص} = 3 \cdot \text{س} \cdot 2 + 2$$

$$(30) \text{ ص} = 2 \cdot \text{س} \cdot (1 + \text{س})$$

$$(33) \text{ ص} = \text{س} \cdot \text{هـ}$$

$$(32) \text{ ص} = (3 - 1) \cdot \text{س} \cdot \text{جنا س}$$

أوجد قيم س التي يكون عندها مماس المنحنى يوازي محور السينات حيث $س < 0$

$$(35) \text{ ص} = \frac{1}{\text{لو} \cdot \text{س} \cdot 2}$$

$$(34) \text{ ص} = 3 \cdot \text{لو} \cdot \text{س}$$

$$(37) \text{ ص} = 3 - \frac{\text{س}}{4} + \frac{\text{لو}}{2} \cdot \text{س}$$

$$(36) \text{ ص} = 81 - 2 \cdot \text{لو} \cdot \text{س}$$

$$(38) \text{ إذا كان } S \text{ هـ} + \frac{1}{2} S \text{ هـ} = \frac{S}{2} \text{ هـ} \text{ أوجد } \frac{S \text{ هـ}}{S \text{ هـ}} \text{ عند } S = 0$$

أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

$$(40) \int \frac{S \text{ هـ}}{S \text{ هـ} + 1} dS$$

$$(39) \int \frac{S^2 + 9}{S^3 + 2} dS$$

$$(42) \int \left(\frac{S^3}{S} + S \right) dS$$

$$(41) \int \left(\frac{3}{S} + 4 \right) dS$$

$$(44) \int S^2 dS$$

$$(43) \int \left(\frac{2}{3} - S \right) dS$$

(45) التقاطع مع المحاور : إذا كان مماس المنحنى $S = 2$ هـ عند النقطة $(2, 2)$ يقطع محور السينات في النقطة P ، ومحور الصادات في النقطة B ، أوجد طول BP .

(46) معادلتا المماس والعمودي : أوجد معادلتا المماس والعمودي للمنحنى $S = 18 - S^2$ لو S عند نقطة تقع عليه وإحداثيها السيني يساوي 2 .

(47) التناسب العكسي : إذا كان ميل المماس عند أي نقطة (S, S) على منحنى الدالة d يتناسب عكسياً مع S وكان ميل المماس يساوي 2 عند $S = 4$ ، $S = 2$ أوجد S بدلالة S .

(48) التوازي : أوجد قيم S (لأقرب رقمين عشريين) التي يكون عندها مماس المنحنى

$$S = \frac{1}{S^2} \text{ لو } S^2 \text{ موازياً لمحور السينات.}$$

اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة الثانية

اختر الإجابات الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$(1) \text{ نها } \left(\frac{1}{S} + 1 \right) \text{ تساوي :}$$

(د) هـ

(ج) هـ

(ب) هـ

(أ) 1

$$(2) M = \text{هـ} \text{ لـ} \text{ فإن } M \text{ تساوي :}$$

(د) 7

(ج) هـ

(ب) $\frac{1}{هـ}$

(أ) 1

(٣) مجموعة حل المعادلة $\log (s-2) + \log (s-2) = \log 6$ هي :

- (أ) $\{0, 0\}$ (ب) $\{0\}$ (ج) $\{2, 2\}$ (د) \emptyset

(٤) إذا كانت د (س) = $s^2 - 3$ لو $s = 5$ فإن د' (٢) تساوي :

- (أ) ١- (ب) ١ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٥) أوجد المشتقة الأولى لكل من :

(أ) $v = (s^2 + 1)^2$ (ب) $v = \log s^2 - h$ (ج) $v = \log \left[\frac{s^2}{s^2} \right]$

(٦) إذا كانت $v = h^2 + s^2$ أثبت أن : $\frac{dv}{ds} = 2s - 9$ (ص - ص)

(٧) أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

(أ) $\int \frac{s^2 + 3}{s} ds$ (ب) $\int \frac{ds}{s^2 + 3}$ (ج) $\int \frac{3}{s^2 + 3} ds$

(٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي $2 - 7$ هـ

وكان د (لر ٢) = ٣، أوجد د (س).

لذا تستطيع الإجابة عن احد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآ :

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ارجع إلى	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣

الاختبار الأول

السؤال الأول :

أكمل ما يأتي :

(١) إذا كانت $v = \frac{1}{s} (s+1)$ فإن $\frac{v}{s} = \dots$

(٢) إذا كانت $\frac{v}{s} = \frac{1-s^2}{s}$ فإن $\frac{v}{s} = \dots$

(٣) إذا كانت $v = \frac{1}{s} (s^2 - 13)$ فإن $v' = \dots$

(٤) إذا كانت $\sqrt{s} = \frac{1}{s} (1 + \frac{1}{s})$ فإن $\frac{v}{s} = \dots$

السؤال الثاني :

(٩) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

(١) $v = (1 + \pi) (s^2 + 1)$ (٢) $v = \frac{1}{s} (s^2 + 1)$

(٣) $v = \frac{1}{s} (s^2 + 1)$

(ب) احسب التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{1}{s} ds$ (٢) $\int \frac{1}{s^2} ds$

(٣) $\int \frac{1}{s^3} ds$

الاختبار الثاني

السؤال الأول :

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كانت $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} (1 + \frac{1}{\text{س}^3})$ فإن $\left[\text{ص} \cdot \text{و} = \dots \right]$ ث

[$\text{س} \cdot \text{ه}^3 \text{س}^3$ أ، ه^3 أ، ∞ أ، صفر]

(٢) إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}^3 (2 \text{س})$ فإن $\text{ص}' = \dots$

[$\frac{1}{\text{س}}$ أ، $\frac{1}{\text{س}^3}$ لو ه، $\frac{1}{\text{س}^3}$ لو ه، $\frac{1}{\text{س}^2}$ أ]

(٣) إذا كان $\frac{\text{و}}{\text{ع}} = \frac{1 - \text{س}^2}{\text{س}}$ فإن $\text{ص} = \dots$ ث

[صفر أ، ع . لو ه ٢ أ، س . لو ه ٢ أ، ١]

(٤) إذا كانت $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} (1 + \text{س})$ فإن $\left[\text{ص}^2 \cdot \text{و} = \dots \right]$ ث

[ه أ، ه ٢ س أ، $\frac{1}{2} \text{ه}^2 \text{س}^2$ أ، $2 \text{ه}^2 \text{س}^2$ س]

السؤال الثاني :

(٩) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

(٢) $\text{ص} = \pi \gamma$

(١) $\text{ص} = 3 \text{س}^{\frac{1}{2}}$

(٣) $\text{ص} = \text{لو}^3 \left| \frac{4 + \text{س}^6}{2 - \text{س}} \right|$

(ب) احسب التكاملات الآتية :

(٢) $\int \frac{3}{\text{س} \cdot \text{لو ه}^3} \cdot \text{و} \text{س}$

(١) $\int \frac{\text{س}^2}{1 + \text{س}^2} \cdot \text{و} \text{س}$

(٣) $\int \frac{\text{ه}^2 \text{س}^2}{1 + \text{ه}^2 \text{س}^2} \cdot \text{و} \text{س}$

الوحدة الثالثة:

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

- ١- تزايد وتناقص الدوال
- ٢- القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)
- ٣- رسم المنحنيات
- ٤- تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

تمارين عامة
تمارين واختبارات الكتاب
اختبارات لامي

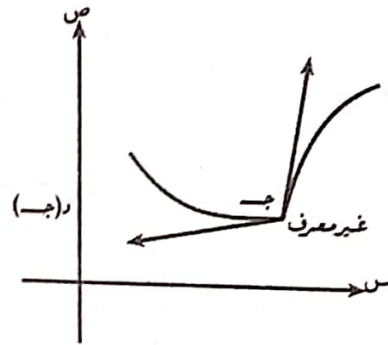
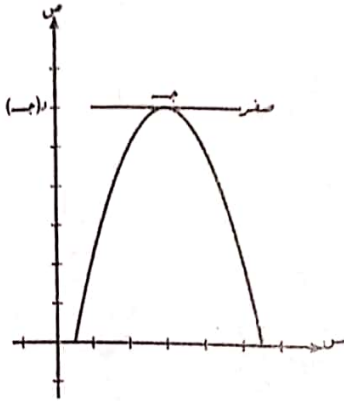
سلوك الدالة ورسم المنحنيات

■ النقطة الحرجة :

إذا كانت الدالة $v = d(s)$ متصلة في $[a, b]$ ،

$s = j \in [a, b]$ ، وكانت :

(١) الدالة متصلة عند $s = j$ (٢) $d'(j) = 0$ ، غير معرفة



فإن الدالة لها نقطة حرجة عند j هي $(j, d(j))$

تزايد وتنقص الدوال (اطراف الدوال) :

لدراسة فترات تزايد وتنقص الدالة القابلة للاشتقاق نجرى الخطوات الآتية :

(١) نوجد $d'(s)$ ثم نساويها بالصفر لنحصل على النقط الحرجة للدالة (نقط الفصل

بين فترات التزايد والتنقص للدالة)

(٢) ندرس إشارة المشتقة $d'(s)$ حول النقط الحرجة (أى داخل كل فترة) :

(أ) إذا نتج $d'(s) < 0$ كانت الدالة تزايدية في هذه الفترة .

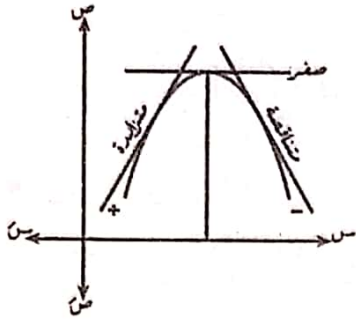
(ب) إذا نتج $d'(s) > 0$ كانت الدالة متناقصة في هذه الفترة .

القيم العظمى والصغرى المحلية :

بفرض أن الدالة $v = d(s)$ قابلة للاشتقاق عند $s = s_0$ وكان $d'(s_0) = 0$ صفر

(١) نحدد الفترات التي ينقسم إليها مجال الدالة بالنقط الحرجة

(٢) يكون للدالة قيمة عظمى محلية عند $s = s_1$ في إحدى الحالات الآتية :



■ تتغير إشارة $f'(s)$ حول s_1

من (+) قبلها إلى (-) بعدها .

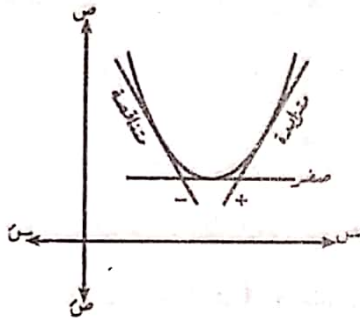
■ يتغير إطراد الدالة حول s_1

من تزايد قبلها إلى تناقص بعدها .

■ عند s_1 نجد أن $f''(s_1) < 0$.

(أى المشتقة الثانية للدالة تكون سالبة)

(٣) يكون للدالة قيمة صغرى محلية عند $s = s_1$ في إحدى الحالات الآتية :



■ تتغير إشارة $f'(s)$ حول s_1

من (-) قبلها إلى (+) بعدها .

■ يتغير إطراد الدالة حول s_1

من تناقص قبلها إلى تزايد بعدها .

■ عند s_1 نجد أن $f''(s_1) > 0$.

(أى المشتقة الثانية للدالة تكون موجبة)

القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة :

بفرض أن الدالة $f(s)$ دالة متصلة في $[a, b]$

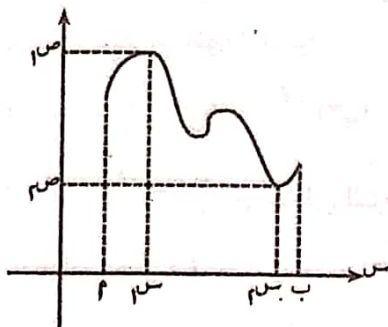
$s_1, s_2, \dots, s_m \in [a, b]$ فإن :

للدالة قيمة عظمى مطلقة عند s_1

$\Leftrightarrow f(s_1)$ هي أكبر عدد في مدى الدالة

وللدالة قيمة صغرى مطلقة عند

$s_m \Leftrightarrow f(s_m)$ هي أصغر عدد في مدى الدالة .



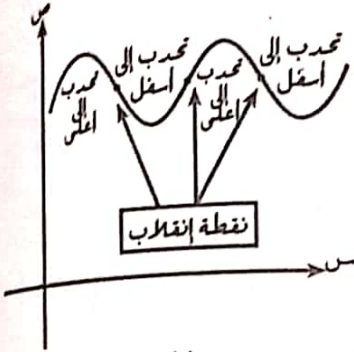
➤ ملحوظة هامة :

نبحث وجود القيم العظمى أو الصغرى المطلقة عند النقط الحرجة وكذلك أطراف الفترة

تحديد المنحنيات :

بفرض أن الدالة $v = d(s)$ قابلة للاشتقاق في $[p, b]$ فإن :

- المنحنى محدب لأسفل عندما يقع تحت جميع أوتاره (فوق جميع مماساته)
- المنحنى محدب لأعلى عندما يقع فوق جميع أوتاره (تحت جميع مماساته)



➤ ملحوظة هامة :

المنحنى محدب لأسفل $\Leftrightarrow d''(s) < 0$ ، والمنحنى محدب لأعلى $\Leftrightarrow d''(s) > 0$.

نقط الانقلاب :

نقطة الانقلاب هي النقطة التي تحقق :

- (١) تنتمي لمجال الدالة .
- (٢) تفصل تحذب منحنيين .
- (٣) تتغير عندها إشارة $d''(s)$
- (٤) $d''(s) = 0$ ، غير معرفة

ولبحث وجود نقط الانقلاب من عدمه نتبع الخطوات الآتية :

- (١) نوجد $d''(s)$ ونساويها بالصفر لإيجاد النقط الحرجة للدالة $d'(s)$
- (٢) نبحث إشارة $d''(s)$ قبل وبعد كل نقطة من النقط الحرجة ، والنقطة التي تتغير حولها إشارة $d''(s)$ تكون نقطة انقلاب .

رسم المنحنيات :

لرسم المنحنى نتبع الخطوات الآتية :

- (١) نوجد $d'(s)$ ، $d''(s)$
- (٢) من $d'(s)$ نعين مناطق التزايد والتناقص وكذلك القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت)
- (٣) من $d''(s)$ نعين مناطق التحذب لأعلى ومناطق التحذب لأسفل وكذلك نعين نقط الانقلاب (إن وجدت) .
- (٤) نضع النقط السابقة في جدول مع تعيين نقط إضافية مثل نقط تقاطع المنحنى مع المحورين وغيرها ثم نرسم النقط في المستوى ونصل بينها لرسم المنحنى .

تمارين على الوحدة الثالثة

المجموعة الأولى:

مسائل على تزايد وتنافس الدالة الحقيقية.

أكمل ما يأتي :

- [١] د (س) = $s^3 - 3s + 2$ فإن د' (س) = والنقط الحرجة للدالة هي
وتكون متزايدة في ، ومتناقصة في
- [٢] إذا كانت د (س) = $s^4 - 4s$ فإن د' (س) = والنقط الحرجة للدالة هي
، وتكون متزايدة في ، ومتناقصة في
- [٣] إذا كانت د (س) = $s^3 - 3s^2$ فإن د' (س) = والنقط الحرجة للدالة هي
، وتكون متزايدة في ، ، ومتناقصة في
- [٤] الدالة د (س) = $s^3 - 3s^2 - 36s$ متناقصة في الفترة
- [٥] النقط الحرجة للدالة د هي النقط التي عندها
- [٦] تكون الدالة د متزايدة في [٢ ، ٣] إذا كان
- [٧] تكون الدالة د متناقصة في [٢ ، ٣] إذا كان
- [٨] إذا كان للدالة د (س) = $s^2 + \frac{p}{s}$ نقطة حرجة عند س = ٢ فإن ٢ =
أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :
- [٩] الدالة د (س) = $s^3 + 3s^2 + 1$ متزايدة عندما س \in
([١ ، ٥] ، [٥ ، ١] ، [٥ ، ١] ، [٥ ، ١])
- [١٠] الدالة د (س) = s^3 تكون متناقصة في الفترة
([١ ، ٥] ، [٥ ، ١] ، [٥ ، ١] ، [٥ ، ١])
- [١١] تكون الدالة د (س) = $s^3 - 12s$ تناقصية في الفترة
([١ ، ٥] ، [٥ ، ١] ، [٥ ، ١] ، [٥ ، ١])

■ [٢٩] د (س) = (س - ٣) س

(متزايدة في $[-\infty, 1]$ ، متناقصة في $[1, 3]$)

■ [٣٠] د (س) = (س - ٢) (س + ١)

(متزايدة في $[-\infty, 1]$ ، متناقصة في $[1, 1]$)

■ [٣١] د (س) = س^٣ - س^٢ س^٤ (متزايدة في $[-\infty, \frac{1}{3}]$ ، متناقصة في $[\frac{1}{3}, \infty]$)

■ [٣٢] د (س) = س^٤ - س^٨ س^٢ + ١٦

(متزايدة في $[-\infty, 0]$ ، متناقصة في $[0, 2]$ ، متزايدة في $[2, \infty]$)

■ [٣٣] د (س) = $\sqrt[3]{(1-s)^2}$ (متناقصة في $[-\infty, 1]$ ، متزايدة في $[1, \infty]$)

■ [٣٤] د (س) = س^٢ - ٥ س^٣ (متزايدة في $[-\infty, 0]$ ، متناقصة في $[0, \infty]$)

■ [٣٥] د (س) = $\sqrt[3]{4-s^2}$ (متزايدة في $[-\frac{2}{3}, 0]$ ، متناقصة في $[0, \frac{2}{3}]$)

■ [٣٦] د (س) = س + $\frac{4}{s}$

(متزايدة في $[-\infty, 2]$ ، متناقصة في $[2, \infty]$)

■ [٣٧] د (س) = $\frac{1+s^3}{2+s}$ (متزايدة في $[-\infty, 2]$ ، متناقصة في $[2, \infty]$)

■ [٣٨] د (س) = $\frac{s^2}{1+s^2}$

(متناقصة في $[-\infty, 1]$ ، متزايدة في $[1, \infty]$)

■ [٣٩] د (س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}(s+3) \text{ ، } s > 1 \\ s^2 - 3 \text{ ، } s \leq 1 \end{array} \right\}$

(متزايدة في $[-\infty, 1]$ ، متناقصة في $[1, \infty]$)

■ [٤٠] د (س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 - 4 \text{ ، } s \geq 2 \\ 8 - s^2 \text{ ، } s < 2 \end{array} \right\}$

(متناقصة في $[-\infty, 2]$ ، متزايدة في $[2, \infty]$)

■ [٤١] د (س) = $5 + |2+s|$ (متناقصة في $[-\infty, 2]$ ، متزايدة في $[2, \infty]$)

■ [٤٢] د (س) = $|س - ١| - ٤$ (متزايدة في $[-١, \infty)$ ، متناقصة في $(-\infty, ١]$)

■ [٤٣] د (س) = $|س - ٣| - ٢$ (متزايدة في $[\frac{٣}{٢}, \infty)$ ، متناقصة في $(-\infty, \frac{٣}{٢}]$)

■ [٤٤] د (س) = $|س|$ (متزايدة في $[٠, \infty)$ ، متناقصة في $(-\infty, ٠]$)

■ [٤٥] د (س) = $\begin{cases} ٣ + س - س^٢ , & س > ٢ \\ ١ - س^٢ , & س \leq ٢ \end{cases}$

(متزايدة في $[-١, \infty)$ ، متناقصة في $(-\infty, ١]$)

■ [٤٦] د (س) = $|س - ٣|$ (متزايدة في $[\frac{٣}{٢}, \infty)$ ، متناقصة في $(-\infty, \frac{٣}{٢}]$)

■ [٤٧] د (س) = $س^٢$ في $[\pi, ٠]$

(متزايدة في $[٠, \frac{\pi}{٤}]$ ، متناقصة في $[\frac{\pi}{٤}, \pi]$)

■ [٤٨] د (س) = $\pi س$ في $[-٠,٥, ٠,٥]$ (متزايدة)

■ [٤٩] د (س) = $س$ في $[\frac{\pi}{٢}, ٠]$ (متناقص)

(متزايدة في $[٠, \frac{\pi}{٣}]$ ، متناقصة في $[\frac{\pi}{٣}, \frac{\pi}{٢}]$)

عين فترات التزايد والتزايد المطرد وفترات التناقص والتناقص المطرد للدوال الآتية :

■ [٥٠] د (س) = $\begin{cases} ٢ + س^٢ , & س > ٠ \\ ٣ - س^٢ , & ٠ \leq س \leq ٣ \\ ٤ - س^٢ , & س \leq ٣ \end{cases}$

■ [٥١] د (س) = $\begin{cases} ٢ + س - س^٢ , & س \geq ١ \\ ٣ , & ١ < س < ٣ \\ ١٢ + س - س^٢ , & س < ٣ \end{cases}$

مسائل على القيم العظمى والصغرى المحلية

أكمل ما يأتي :

[١] ■ إذا كان $d'(s) = s^2 - 9$ فإن لمنحنى الدالة قيمة صغرى محلية عند $s = \dots$

[٢] ■ إذا كانت النقطة $(p, b) \in$ منحنى الدالة فإنها تسمى :

(٢) نقطة حرجة إذا كان \dots

(ب) نقطة قيمة عظمى محلية إذا كان \dots

(ج) نقطة قيمة صغرى محلية إذا كان \dots

[٣] ■ إذا كانت $s \in [\pi, 0]$ فإن الدالة $d(s) = s \sin s + \cos s$ لها قيمة صغرى

مطلقة عند $s = \dots$

[٤] ■ إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم مقذوف إلى أعلى من العلاقة $f = 9.8t - 9.8t^2$

حيث t الزمن فإن أقصى مسافة يبلغها الجسم هي بعد مرور \dots ث

[٥] ■ إذا كانت d دالة كثيرة حدود وكان d لها قيمة صغرى محلية عند $s = 2$ فإن $d'(2) =$

أختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[٦] ■ إذا كان منحنى الدالة $d(s) = s^3 + 18s^2 + 1$ له نقطة انقلاب عند $s = 2$

, فإن $p = \dots$ [١ أ، ٣ أ، ٣ - أ، ١٢]

[٧] ■ في الفترة $[\pi, \pi -]$ منحنى الدالة $d(s) = s \sin s$ له قيمة عظمى محلية عند النقطة

[$(0, \pi)$ أ، $(1, \frac{\pi}{2})$ أ، $(-\frac{\pi}{2}, 1)$ أ، $(0, 0)$]

[٨] ■ المنحنى $v = s - s^2$ له قيمة عظمى محلية عند $s = \dots$

[صفر أ، ٤ أ، ٢ أ، ١]

■ [٩] إذا كانت النقطة (٢، د) \exists منحنى الدالة د وكان د' (٢) = صفر فإن هذه النقطة

تسمى

[نقطة حرجة أ، نقطة انقلاب أ، قيمة عظمى مطلقة أ، قيمة صغرى مطلقة]
أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية إن وجدت :

■ [١٠] د (س) = (س - ٣) + ١ [د (٣) = ١ صغرى]

■ [١١] د (س) = ٥ + س٤ - س٢ [د (٢) = ٩ عظمى]

■ [١٢] د (س) = (س - ٣) + ٢ [لا يوجد]

■ [١٣] د (س) = (س - ٣) + ١ [د (٢) = ١ صغرى]

■ [١٤] د (س) = $\sqrt[2]{٩ - ٤س}$ [د (٠) = ٣ عظمى، د (١، ٥) = د (١، ٥) = ٠ صغرى]

■ [١٥] د (س) = $\sqrt[3]{١ - س}$ [لا يوجد]

■ [١٦] د (س) = $\sqrt[3]{(٢ - س)^2}$ [د (٢) = ٠ صغرى]

■ [١٧] د (س) = $\sqrt[3]{(س + ٤)^2} - ٣$ [د (٤ -) = ٣ عظمى]

■ [١٨] د (س) = ٢س٢ - ٣س٣ + ٢ [د (٠) = ٢ عظمى، د (١) = ١ صغرى]

■ [١٩] ص = ٢س٣ + ٦س٢ - ١٨س + ٦ [د (٣ -) = ٦٠ عظمى، د (١) = ٤ - صغرى]

■ [٢٠] ص = ٣س٣ - ٩س٢ + ١٥س + ١٠ [د (١) = ١٧ عظمى، د (٥) = ١٥ - صغرى]

■ [٢١] ص = س(س - ٣) + ٢ [د (١) = ٦ عظمى، د (٣) = ٢ صغرى]

■ [٢٢] د (س) = (س - ١)(س - ٢) [د (٢) = ٠ صغرى، د (٤/٣) = ٤/٣ عظمى]

■ [٢٣] د (س) = س٤ - ٤س٣ + ٤س٢ - ١٥ [د (٠) = ١٥ صغرى، د (١) = ١٤ عظمى، د (٢) = ١٥ - صغرى]

■ [٢٤] د (س) = س٤ - ٢س٣ - ٣س٢ - ٤س [د (٠) = ١٥ صغرى، د (١) = ١٤ عظمى، د (٢) = ١٥ - صغرى]

[د (٢ -) = ٤ صغرى، د (١) = ٤ - صغرى، د (١/٢) = ١٧/١٦ صغرى]

[٢٥] ■ $\frac{432}{s} + s^2 = (s)$ د (٦) = ١٠٨ صغرى

[٢٦] ■ $\frac{s^4}{s^2 + 4} = (s)$ د (٢) = ١ عظمى، د (٢-) = ١- صغرى

[٢٧] ■ $\frac{25 + s^5 + s^3}{s + 2} = (s)$ د (١) = ١١ صغرى، د (٥-) = ٢٥- عظمى

[٢٨] ■ $\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s - 1} = (s)$ د (١-) = $\frac{1}{3}$ صغرى، د (١) = ٣ عظمى

عين النقاط الحرجة لكل من الدوال الآتية ثم أختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية :

[٢٩] ■ $\left. \begin{array}{l} s^2 - 5, s > 0 \\ s^3 + 5, s \leq 0 \end{array} \right\} = (s)$ د (٠) = ٥ صغرى

[٣٠] ■ $\left. \begin{array}{l} s^3 + 7, s > 1 \\ s - 3, s \leq 1 \end{array} \right\} = (s)$ د (١-) = ٤ عظمى

[٣١] ■ $\left. \begin{array}{l} s^2 - 1, s \geq 2 \\ s^2 - 4s + 1, s < 2 \end{array} \right\} = (s)$ د (٢-) = ٣- صغرى

[٣٢] ■ $\left. \begin{array}{l} s^2 - s - 2, s \geq 2 \\ \frac{2}{5}(s - 3), s < 2 \end{array} \right\} = (s)$ د (٢-) = ٢ عظمى

[٣٣] ■ $\left. \begin{array}{l} s + 4, s > 1 \\ s^2 - 2s, s \leq 1 \end{array} \right\} = (s)$ د (١-) = ٣ عظمى، د (١) = ١- صغرى

[٣٤] ■ $\left. \begin{array}{l} s^3 - s - 4, s \geq 1 \\ s^2 - 4, s < 1 \end{array} \right\} = (s)$ د (٢-) = ٣ عظمى، د (١) = ١- صغرى

[٣٥] ■ $|s^2 - 3| - 5 = (s)$ د (٣) = ٥ صغرى

[٣٦] ■ $|5 - s^2| - 8 = (s)$ د (٥) = ٨ عظمى

[٣٧] ■ $\left. \begin{array}{l} s^3 - 2, s > 2 \\ 4, 2 \geq s > 0 \\ s^3 - 19, s \leq 0 \end{array} \right\} = (s)$ د (٢) = ٤ عظمى، د (٢-) = ١٩- صغرى

[كل من د (٢)، د (٥) ع. م.، د (س) لكل س \exists ، ٢، ٥ [ص. م. أ. ع. م.]

$$\left. \begin{array}{l} s + 3 > 0, s > 0 \\ s \geq 0, s > 0 \\ s - 1 \leq 0, s \leq 2 \end{array} \right\} = (s) \text{ د (س) } \quad [38] \blacksquare$$

[كل من د (0)، د (2) ص. م. د (س) لكل س \exists 2، 0 [ص. م. أ. ع. م.]

$$[39] \blacksquare \text{ د (س) } = \frac{1}{3} s^2 |s| \quad [صغرى 0 = (0)]$$

$$[40] \blacksquare \text{ د (س) } = |s - 5| \quad [صغرى 0 = (0)]$$

$$[41] \blacksquare \text{ د (س) } = |s - 3| \quad [ص. م. 0 = (0)]$$

$$[42] \blacksquare \text{ د (س) } = \sqrt[3]{s^2 - 4s}$$

[د (2) = $\sqrt[3]{4} - 2$ صغرى، س = 0، س = 4 مجرد نقط حرجة]

$$[43] \blacksquare \text{ د (س) } = \sqrt[3]{s(2 - s)} \quad [صغرى 0 = (2)]$$

$$[44] \blacksquare \text{ د (س) } = \sqrt[3]{s - 8}$$

[د (-2) = -4 صغرى، د (2) = 4 عظمى، د (-2) عظمى، د (2) صغرى]

$$[45] \blacksquare \text{ د (س) } = \text{جاس} + \text{جتاس} \quad [\text{في } 0, \frac{\pi}{2}] \quad [\text{د } (\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \text{ عظمى}]$$

$$[46] \blacksquare \text{ د (س) } = \text{س} - \text{طاس} \quad [\text{في } 0, \frac{\pi}{2}] \quad [\text{د } (\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ ع. م.}]$$

$$[47] \blacksquare \text{ د (س) } = \text{جاس} \text{ جتاس} \quad [\text{في } 0, \pi]$$

$$[\text{د } (\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} \text{ ع. م.، د } (\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} \text{ ص. م.}]$$

[48] \blacksquare أوجد P ، B بحيث أن الدالة $D(s) = s^2 + P + s + B$ يكون لها نقطة حرجة عند

$s = 2$ ، $d(2) = 1$ ، ثم عين نوع النقطة $(2, 1)$ من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية

$$[P = -4, B = 5, \text{ صغرى}]$$

[49] \blacksquare أوجد قيم P ، B إذا علمت أن الدالة $D(s) = s^2 + P + \frac{B}{s}$ لها نقطة حرجة عند

$s = 3$ ، $d(3) = 2$ ، ثم بين نوع النقطة $(3, 2)$.

$$[P = \frac{1}{3}, B = 3, \text{ صغرى محلية}]$$

مسائل على القيم العظمى والصغرى المطلقة

أوجد القيمة العظمى والصغرى المطلقة لكل من الدوال الآتية في الفترة المعطاة :

- [1] ■ د (س) = س^٢ + ٦ س في [-٥ ، -١] [صغرى = -٩ ، عظمى = -٥]
- [2] ■ د (س) = س^٢ - ٤ س + ٣ في [١ ، ٣] [صغرى = -١ ، عظمى = ٠]
- [3] ■ د (س) = ٣ - ٥ س - س^٢ في [-٤ ، ٣] [عظمى = $\frac{٩}{٤}$ ، صغرى = -٢١]
- [4] ■ د (س) = س^٣ - ١٢ س في [-٣ ، ٣] [عظمى = ١٦ ، صغرى = -١٦]
- [5] ■ د (س) = ٢ س^٣ - ٩ س^٢ + ١٢ س في [$\frac{٣}{٢}$ ، ٤] [صغرى = ٤ ، عظمى = ٣٢]
- [6] ■ د (س) = س^٣ - ٣ س^٢ - ٢٤ س + ٥٠ في [-٥ ، ٣] [صغرى = -٣٠ ، عظمى = ٧٨]
- [7] ■ د (س) = س^٤ - ٨ س^٣ + ٢٢ س^٢ - ٢٤ س + ١٢ في [-٤ ، ٤] [صغرى = ٣ ، عظمى = ١٢٢٨]
- [8] ■ د (س) = $\sqrt[٣]{(٢-س)}$ في [-٦ ، ١] [صغرى = ٠ ، عظمى = ٤]
- [9] ■ د (س) = س + $\frac{١}{س}$ في [$\frac{١}{٣}$ ، ٣] [صغرى = ٢ ، عظمى = $\frac{١٠}{٣}$]
- [10] ■ د (س) = $\frac{١-س}{٨+س^٢}$ في [-٣ ، ٦] [صغرى = $-\frac{١}{٤}$ ، عظمى = $\frac{١}{٨}$]
- [11] ■ د (س) = ٢ س^٢ - ٩ س في [٠ ، ٣] [صغرى = ٠ ، عظمى = ٩]
- [12] ■ د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{١-س}}{١+س}$ في [٠ ، ٩] [صغرى = -١ ، عظمى = $\frac{١}{٣}$]
- [13] ■ د (س) = س^٢ $\sqrt[٣]{(٤-س)}$ في [-١ ، ٨] [صغرى = ٠ ، عظمى = ٦٤]

$$\left. \begin{array}{l} \text{د (س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{س} + 3, & \text{س} \geq 4 \\ \text{س} - 15, & \text{س} < 4 \end{cases} \end{array} \right\} \quad [14] \blacksquare$$

في [0, 0] [صغرى = -1, عظمى = 3]

$$\left. \begin{array}{l} \text{د (س)} = \begin{cases} \text{س}^2 - 3\text{س} - 3, & \text{س} \geq 4 \\ \text{س} - 1, & \text{س} < 4 \end{cases} \end{array} \right\} \quad [15] \blacksquare$$

في [3, 4 -] [صغرى = -5, عظمى = 4]

$$\left. \begin{array}{l} \text{د (س)} = \begin{cases} \text{س}^2 - 4, & \text{س} \geq 2 \\ \text{س}^2 - 7\text{س} + 10, & \text{س} < 2 \end{cases} \end{array} \right\} \quad [16] \blacksquare$$

في [0, 2 -] [صغرى = -9/4, عظمى = 4]

$$\text{د (س)} = | \text{س} - 2 | - 1 \quad \text{في [0, 0]} \quad \text{[صغرى = -1, عظمى = 2]} \quad [17] \blacksquare$$

$$\text{د (س)} = | \text{س}^2 + 1 | - 3 \quad \text{في [2, 3 -]} \quad \text{[صغرى = -2, عظمى = 3]} \quad [18] \blacksquare$$

$$\text{د (س)} = \text{س}^2 | \text{س} - 3 | \quad \text{في [4, 0]} \quad \text{[صغرى = 0, عظمى = 8]} \quad [19] \blacksquare$$

$$\text{د (س)} = \text{س} | \text{س} - 4 | + 3 \quad \text{في [3, 3 -]} \quad \text{[صغرى = -1, عظمى = 7]} \quad [20] \blacksquare$$

المجموعة الرابعة :

مسائل على تطبيقات القيم العظمى والصغرى

[1] ■ عددان موجبان مجموعها 12 ، أوجد العددين إذا كان حاصل ضربها أكبر ما يمكن .

[6, 6]

[2] ■ أثبت أن مجموع أي عدد حقيقي ومعكوسة الضربي هو على الأقل 2 .

[3] ■ عددان موجبان حاصل ضربهما 16 ، أوجد العددين إذا كان مجموع أحدهما ومربع الآخر

أقل ما يمكن .

[4, 4]

■ [٤] إذا كانت s ، v كميتان ترتبطان بالعلاقة $s + v = 10$ ، أوجد القيمة العظمى

للقيمة $s^3 v^2$ [٣٤٥٦]

■ [٥] سلك طوله ١٥ سم يراد تقسيمه إلى جزئين بحيث يكون مجموع مربع الأول وأربعة أمثال

مكعب الآخر أقل ما يمكن فما طول كل جزء ؟ $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$

■ [٦] أوجد نقطة على المنحنى $v^2 = s + 1$ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة $(0, 3)$

أقل ما يمكن . $[(2, \sqrt{5}), (2, -\sqrt{5})]$

■ [٧] عمودان ارتفاعاهما ٣٠ قدم ، ٤٠ قدم ويبعدان عن بعضهما ٨٠ قدم . أوجد نقطة على

المستقيم الواصل بين قاعدتيهما بحيث يكون مجموع مربعي بعديهما عن قمتي العمودين أقل ما يمكن [٤٠ قدم عن كل من قاعدتي العمود]

■ [٨] بدأ شخص P حركته من السكون بعجلة منتظمة ١ سم/ث^٢ ومن نقطة تبعد عنه ٦٠ سم

بدأ شخص آخر B في العدو ليلحق به بسرعة منتظمة ٤ سم/ث . فمتى تكون المسافة بينهما أقل ما يمكن وما هي هذه المسافة ؟

[٤ ث ، ٥٢ سم]

■ [٩] سفينة B على بعد ٧٥ كم شرق سفينة أخرى P والسفينة B تسير إلى الغرب بسرعة ٩

كم / الساعة والسفينة P تسير إلى الجنوب بسرعة ١٢ كم/س . متى تكون المسافة بينهما

أقل ما يمكن وما هي هذه المسافة ؟ [٣ ساعة ، ٦٠ كم]

■ [١٠] إذا كان $P = 50$ سم ووضع مصدران للضوء إحداهما عند P والآخر عند B ، أوجد

النقطة الواقعة على PB والتي تكون عندها شدة الاستضاءة أصغر ما يمكن إذا علم أن

النسبة بين شدتي الاستضاءة للمصدرين ٢٧ : ٨ وأن شدة الاستضاءة تتناسب عكسياً مع مربع

البعد عن المصدر . [٣٠ سم من P]

■ [١١] مصنع تليفزيون يبيع s جهاز في الأسبوع بسعر الجهاز c جنيه حيث

$c = 500 - 7s$ وكانت التكاليف الكلية لهذه الأجهزة تساوي $700 + 36s + \frac{1}{4}s^2$

جنيهاً . أوجد قيمة s لكي يحصل المصنع على أكبر ربح ممكن . [٣٢]

■ [١٢] إذا كانت تكاليف الوحدة المباعة من انتاج مصنع ما هي ٥٠ جنيهاً . فإذا بيعت بسعر س جنيهاً فإن عدد الوحدات المباعة = $9(100 - s) + \frac{300}{50 - s}$. أوجد ثمن الوحدة للحصول على أكبر ربح [٧٥ جنيهاً]

■ [١٣] مصنع للإطارات ينتج يومياً ١٠٠ س إطار من نوع ممتاز ، ١٠٠ ص إطار من نوع متوسط . حيث $\frac{8-32}{s-5} = s > 4$ فإذا كان مكسب المصنع من النوع الممتاز جنيهاً عن كل إطار ومكسبه من النوع المتوسط جنيهاً واحداً عن كل إطار فأوجد عدد الإطارات من كل نوع والتي تحقق أكبر مكسب يومي للمصنع [٤٠٠، ٣٠٠]

■ [١٤] سلك طوله ٢٠٠ سم ، ثنى ليكون أضلاع مستطيل ، أوجد أبعاد المستطيل لكي تكون ساحته أكبر ما يمكن . [٥٠، ٥٠ سم]

■ [١٥] النقطة م (س ، ص) تتحرك على الخط المستقيم الذي معادلته : $3 = (8 - s) = ص$ في مستوى الإحداثيات حيث $s < 0$ ، $ص < 0$ ، كانت م هي المستقط العمودي للنقطة م على محور السينات ، النقطة ب هي المسقط العمودي للنقطة م على محور الصادات ، ح هي المساحة السطحية للمستطيل و م ب ح حيث و نقطة الأصل . أوجد ح بدلالة س ، قيمة س عندما تكون ح أقل ما يمكن . [س = ٤]

■ [١٦] قطعة من السلك طولها ٢٠٠ سم . ثنيت على شكل مستطيل م ب ج د بحيث يمر السلك على كل ضلع من المستطيل مرتين ماعدا الضلع م ب فيمر السلك عليه مرة واحدة . أوجد القيمة العظمى لمساحة المستطيل . [٢٥٠٠ سم]

■ [١٧] قطعة معدنية على شكل قطاع دائري طول محيطه ٤٨ سم أوجد طول نصف القطر الذي يجعل مساحة هذا القطاع أكبر ما يمكن . [نوه = ١٢ سم]

■ [١٨] قطعة سلك طولها ٦٠ سم . قطعت إلى جزئين طول أحدهما س سم ثم ثنى كل جزء فتكون من كل منهما مستطيل طوله ضعف عرضه عبر عن مجموع مساحتي المستطيلين بدلالة س ثم أوجد بعدى كل منهما عندما يكون هذا المجموع قيمة صغرى . [١٠، ٥ سم]

■ [١٩] سلك معدني رفيع طوله ٦٤ سم قطع إلى جزئين ثنى أحدهما على شكل مربع وثنى الآخر على شكل دائرة . أوجد طول ضلع المربع عندما يكون مجموع المساحتين قيمة صغرى . [٦٤ سم]

[$\frac{64}{4+\pi}$ سم]

■ [٢٠] أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٥ سم .

[٥٠ سم^٢]

■ [٢١] P ب ج صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية في ج وطول وتره ٤٠ سم ويتغير ضلعا P ج ،

$\overline{P} \overline{ج}$ ، بينما يظل طول $\overline{P} \overline{ب}$ ثابتا . أوجد أكبر مساحة للمثلث P ب ج . [٤٠٠ سم^٢]

■ [٢٢] P ب ج هـ مستطيل فيه $P = ١٢$ سم ، $ب ج = ٨$ سم . أخذت النقطتان هـ ، و على

P ب ، $\overline{P} \overline{ج}$ على الترتيب بحيث $ب هـ = ب و$. أوجد موضعي النقطتين هـ ، و عندما تكون

مساحة سطح الشكل الرباعي و هـ و ج أكبر ما يمكن . [$ب هـ = ب و = ٤$ سم]

■ [٢٣] P ب ج و قطعة من الورق على شكل مستطيل فيه $P = ٨٠$ سم ، $ب ج = ١٢٠$ سم . أخذت

على أضلاعه P ب ، $\overline{P} \overline{ج}$ ، $\overline{ج} \overline{و}$ ، $\overline{و} \overline{ل}$ ، $\overline{ل} \overline{م}$ ، $\overline{م} \overline{هـ}$ ، و على الترتيب بحيث P ل

$= ج هـ = س$ ، $ج م = م و = ٢$ س . أوجد قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع

ل م هـ و أكبر ما يمكن . [٣٥ سم]

■ [٢٤] نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين قاعدته هي الضلع العلوي للمستطيل .

فإذا كان محيط النافذة يساوي ٣٠٠ سم ، ارتفاع المثلث يساوي $\frac{٢}{٣}$ طول قاعدته . أوجد

بعدي المستطيل عندما تكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن . [٥٠ سم ، ٧٥ سم]

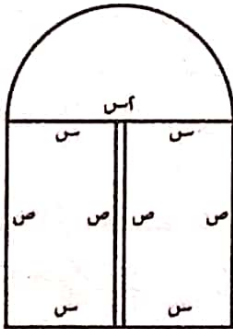
■ [٢٥] نافذة من الزجاج على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي عرض

المستطيل . فإذا كان الجزء العلوي من الزجاج الملون والجزء السفلي من الزجاج الشفاف وكان

الزجاج الملون يسمح بنفاذ نصف كمية الضوء التي ينفذها الزجاج الشفاف لنفس المساحة .

أوجد أبعاد النافذة بحيث تسمح بنفاذ أكبر كمية من الضوء علماً بأن محيط النافذة ٤٧٠ سم .

$$\left[\frac{٢٠}{٣} (١٢ + ٣\sqrt{٣}) ، ١١٥ - ١٠\sqrt{٣} \text{ سم} \right]$$



■ [٢٦] الشكل المجاور : يوضح قضيب رفيع من الحديد طوله ل سم

صنع منه إطار لنافذة زجاجية على هيئة مستطيلين متلاصقين

متطابقين عرض كل منهما س تعلوهما نصف دائرة قطرها

يساوي ٢ س . أوجد أبعاد النافذة لأبزر مساحة ممكنة لها .

$$\left[\frac{١}{١٢} ل ، \frac{ل(\pi - ٦)}{٤٨} \right]$$

■ [٢٧] صفيحة على شكل مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين قطر كل منهما = عرض المستطيل فإذا كان

محيط الصفيحة = 100π سم . أوجد القيمة العظمى لمساحتها [٢٥٠٠ π سم^٢]

■ [٢٨] لوحة مستطيلة الشكل محيطها ٨٠٠ سم يراد عمل إعلان على أكبر مساحة منها بشرط أن يترك

هامشاً في أسفله عرضه ٣٠ سم وثلاث هوامش في جهاتها الثلاث الباقية عرض كل منها ٢٠ سم .

احسب طول بعدى اللوحة . [٢٠٥ ، ١٩٥ سم]

■ [٢٩] إذا أردت أن تنشئ لمنزل حديقة مكونة من مستطيل مزروع بالزهور مساحته ١٠ أمتار مربعة

وطريق مرصوف يحيط بالزهور عرضه متر واحد عند كل من ضلعين متقابلين للمستطيل ،

١٦٠ سم عند كل من الضلعين الآخرين فأوجد بعدى المستطيل لكي تكون مساحة الأرض اللازمة

لذلك أصغر ما يمكن . [٤ ، ٢ $\frac{1}{4}$ متر]

■ [٣٠] P مثلث قائم الزاوية في J ، $PJ = ١٠$ سم ، $JQ = ٣٠$ سم . رسم Q يوازي

PJ ويقطع PQ في Q ، PJ في H . ثم أسقط العمود Q على PJ فلاقاة في نقطة و

. أثبت أن أكبر مساحة للمستطيل Q و JH هي ٧٥ سم^٢ .

■ [٣١] أوجد بعدى المستطيل ذى المساحة العظمى الذى يمكن رسمه داخل مثلث متساوى الساقين

طول قاعدته ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم بحيث تقع رأسان منه على قاعدة المثلث وكل من الرأسين

الباقين على أحد ساقى المثلث . [٥ ، ٤ سم]

■ [٣٢] إذا كانت قاعدة دالة D هي $D(s) = 9 - s$ حيث $0 \leq s \leq 3$ ، (P) نقطة تقع على

منحنى الدالة D ، (Q) هي نقطة الأصل ، PQ عمودان من P على محور السينات ،

الصادات على الترتيب . أوجد إحداثى النقطة (P) عندما تكون مساحة المستطيل PQ و J أكبر

ما يمكن [٦ ، ٣ $\frac{1}{2}$]

■ [٣٣] أوجد المساحة السطحية لأكبر مستطيل تقع رأساه العلويان على المنحنى $ص = ١٨ - س$

ورأساه السفليان على المنحنى $ص = س - ١٨$ ويقع داخل المنطقة المحدودة بهذين

المنحنيين . [٣٦ ، ٣٦ سم^٢]

■ [٣٤] مستقيم يمر بالنقطة $(٣ ، ٢)$ ويقطع الجزء الموجب لمحور السينات في P ، الجزء الموجب

لمحور الصادات في Q ، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث PQ هي ١٢ وحدة مربعة حيث

و نقطة الأصل .

■ [٣٥] \overline{BP} مستقيم يقطع محور السينات في P ، محور الصادات في B ويمر بالنقطة $J(٨, ١)$.
أوجد أصغر طول للقطعة BP . [٥٥]

■ [٣٦] إذا كانت أطوال ثلاثة أضلاع لشبه منحرف متساوية وكل منها ٤ سم أثبت أن مساحة شبه المنحرف تكون أكبر ما يمكن حينما يكون طول الضلع الرابع ٨ سم

■ [٣٧] P B J قطعة أرض على شكل شبه منحرف فيه BP [B J A] ، $BP \perp BJ$ ، \overline{BP} ،

P $B = ١٥$ م ، B $J = ٢٠$ م ، J $A = ٥$ م ، يراد بناء منزل على جزء من هذه الأرض على

شكل مستطيل $وه$ B $ه$ حيث $(و)$ نقطة على PA ، $وه \perp BP$ ، $و$ $ه$ $BP \perp BJ$. أوجد

أكبر مساحة للمستطيل $وه$ B $ه$. [١١٢,٥ ٢٢]

■ [٣٨] صندوق على شكل متوازي مستطيلات ارتفاعه ١٥ سم ، بعدا قاعدته : $(١١ - س)$ ،

$(٣ + س)$. أثبت أن حجم هذا الصندوق لا يزيد عن ٧٣٥ سم^٣ .

■ [٣٩] صفيحة من المعدن مستطيلة الشكل بعداها ٢١ بوصة ، ١٦ بوصة ، قطع من كل ركن من

أركانها الأربعة مربع طول ضلعه $س$ ، ثم ثنيت الأجزاء البارزة من الصفيحة ليتكون حوض على

شكل متوازي مستطيلات عمقه $س$ بوصة ، أوجد قيمة $س$ التي تجعل حجم الحوض أكبر ما

يمكن . [٣ بوصة]

■ [٤٠] علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدتها مربعة الشكل فإذا كان مجموع ارتفاعها ومحيط

قاعدتها يساوي ٩٠ سم فأوجد أبعاد هذه العلبة عندما يكون حجمها أكبر ما يمكن .

[١٥ ، ١٥ ، ٣٠ سم]

■ [٤١] علبة معدنية على شكل متوازي المستطيلات بدون غطاء يراد صنعها من صفائح معدنية

مساحتها ٥٤ بوصة مربعة بحيث يكون طول قاعدة العلبة مساوياً ضعف عرضها . أوجد أبعاد

العلبة التي تجعل الحجم أكبر ما يمكن . [٣ ، ٦ ، ٢ بوصة]

■ [٤٢] متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه الأثنى عشر يساوي ٣٠ بوصة

أوجد أبعاد متوازي المستطيلات عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن . [$٢,٥$ ، $٢,٥$ ، $٢,٥$ بوصة]

■ [٤٣] إنشاء أسطوانة الشكل بدون غطاء مساحته الكلية ٤٦٢ سم^٢ . أوجد نصف قطر قاعدته عندما

تكون سعته قيمة عظمى $(\frac{٢٢}{٧} = \pi)$. [٧ سم]

■ [٤٤] يراد عمل أسطوانة دائرية قائمة مقفلة القاعدتين من صفيحة معدنية رقيقة مساحتها $\pi ٣٦$ بوصة مربعة . أوجد ارتفاع وطول نصف قطر قاعدة الأسطوانة إذا أريد أن يكون حجمها أكبر ما يمكن وما هو هذا الحجم .
[$ع = ٦٢$ ، $نوه = ١٢$ ، $\pi ٦٢$]

■ [٤٥] صندوق على شكل متوازي المستطيلات بدون غطاء وقاعدته مربعة الشكل . فإذا كانت سعة الصندوق تساوي ١٠٨ بوصة مكعبة فأوجد أبعاد الصندوق عندما تكون مساحة جميع أوجهه أصغر ما يمكن .
[بوصة ٣ ، ٦ ، ٦]

■ [٤٦] أوجد أقل ثمن يمكن دفعه لشراء خشب . ثمن القدم المربع منه ١,٥ جنيه لعمل صندوق مقفل على شكل متوازي مستطيلات حجمه ١٨٠ قدماً مكعباً وارتفاعه خمسة أقدام .
[٢٨٨ جنيه]

■ [٤٧] مخزن على هيئة متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وحجمه ٩٦ م^٣ . يراد طلاء حوائطه وسقفه وتغطيته أرضيته فإذا علم أن تكلفة المتر المربع للطلاء نصف تكلفة المتر المربع لغطاء الأرضية . أوجد أبعاد المخزن التي تجعل التكلفة الكلية أقل ما يمكن .
[٦ ، ٤ ، ٤]

■ [٤٨] وعاء على شكل أسطوانة دائرية قائمة مقفلة القاعدتين وحجمها $\pi ١٦٠٠٠$ سم^٣ أوجد طول نصف قطر قاعدتها وارتفاعها عندما تكون المساحة السطحية الكلية لهذه الأسطوانة أقل ما يمكن
[$نوه = ٢٠$ سم ، $ع = ٤٠$ سم]

■ [٤٩] خزان للماء الساخن قاعدته أفقية على شكل أسطوانة دائرية قائمة تعلوه نصف كرة بحيث كانت المساحة الكلية للخزان ثابتة وتساوي ٢٠π م^٢ . أثبت أنه إذا كان حجم الخزان نهاية عظمى فإن نصف قطر قاعدة الأسطوانة يساوي ارتفاعها .

■ [٥٠] طريق مستقيم طوله ٦٠ كم يربط بين مدينتين صناعيتين ٢ ، $ب$. ينتشر الدخان من المدينتين في حيز كبير يحيط بهما . بفرض أن كثافة الدخان عند أي نقطة تتناسب عكسياً مع مربع بعدها عن منبع الدخان وعلم أن كثافة الدخان الحادث من المدينة ٢ على مسافة معينة تساوي ثمانية أضعاف كثافة الدخان الحادث من المدينة $ب$ على نفس المسافة . أوجد النقطة الواقعة على الطريق والتي تكون كثافة الدخان عندها أقل ما يمكن علماً بأن كثافة الدخان عن أي نقطة تساوي مجموع كثافتيه من المدينتين .
[٤٠ كم من ٢]

■ [٥١] إذا باعت مكتبة ١٠٠ نسخة من كتاب ما كان مكسبها في الكتاب الواحد ٧ جنيه وإذا زاد عدد النسخ المباعة عن ١٠٠ كتاب فإن المكسب في الكتاب الواحد يقل بمقدار ٥ قروش عن كل كتاب زيادة فكم عدد الكتب التي تعطى المكتبة أكبر ربح .
[١٢٠]

■ [٥٢] إتفقت إحدى الشركات السياحية مع إحدى المدارس على عمل رحلة بشرط أن يدفع كل مشترك ٤٢ جنيهاً وأن لا يزيد عدد المشتركين عن ١٥٠ فإذا قبلت الشركة تخفيض المبلغ الذي يدفعه كل مشترك ٢٠ قرشاً نظير كل مشترك جديد زيادة عن العدد ١٥٠ ، أوجد عدد المشتركين الذي يحقق أكبر دخل للشركة . [١٨٠ مشترك]

■ [٥٣] إذا كانت تكاليف استهلاك وقود قاطرة يتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكلفة ٢٥ جنيهاً في الساعة عندما تكون السرعة ٢٥ ميل / الساعة ، كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه في الساعة بغض النظر عن سرعتها . أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة قطع الميل الواحد أقل ما يمكن . [٥٠ ميل / الساعة]

المجموعة الخامسة :

➤ التحدب - نقط الانقلاب - رسم المنحنيات

أكمل ما يأتي :

- [١] إذا كانت النقطة $(p, b) \in$ منحنى الدالة فإنها تسمى نقطة انقلاب إذا كان
- [٢] إذا كان $d(s) = \sqrt[3]{s-p}$ لها نقطة انقلاب عند $(p, 0)$ فإن $d''(p) = \dots$
- [٣] إذا كان منحنى الدالة d يقع فوق جميع المماسات المرسومة من جميع نقاط المنحنى فإن منحنى الدالة يكون
- [٤] إذا كان منحنى الدالة d يقع أسفل جميع المماسات المرسومة من جميع نقاط المنحنى فإن منحنى الدالة يكون
- [٥] إذا كان $d''(s) < 0$ في الفترة $[p, b]$ فإن منحنى الدالة يكون في هذه الفترة
- [٦] إذا كان $d''(s) > 0$ في الفترة $[p, b]$ فإن منحنى الدالة يكون في هذه الفترة
- [٧] يكون منحنى الدالة $v = s^3$ محدباً لأعلى في الفترة
- [٨] إذا كان للدالة $d(s) = (s-p)^3 + 5$ نقطة انقلاب عند $s = 2$ فإن قيمة $p = \dots$

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [٩] إذا كان منحنى الدالة $y = x^3 + 18x^2 + 1$ له نقطة انقلاب عند

$x = 2$ فإن $y = \dots$ [١ ٣ ٣ - ٣ ١٢]

■ [١٠] منحنى الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 1$ يكون محدباً لأسفل عندما

[$x < 0$ ، $x > 0$ ، $x < 0$ ، $x > 0$]

■ [١١] منحنى الدالة $y = x^3 - 7x^2 + 5x + 1$ حيث $x > 0$ محدب لأعلى عند

$x \in (0, 1) \cup (4, \infty)$ [١ ٢ ٣ ٤]

■ [١٢] منحنى الدالة $y = x^3 - 9x^2 + 4x - 1$ محدب لأعلى في

[$x < 0$ ، $x > 0$ ، $x < 0$ ، $x > 0$]

عين فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنيات كل من الدوال الآتية :

■ [١٣] $y = x^3 + 3x - 7$ د (س) محدب لأعلى في $x \in (0, 3)$

[محدب لأعلى في $x \in (0, 3)$]

■ [١٤] $y = (x - 3)^4$ د (س) محدب لأسفل في $x \in (0, 3)$

[محدب لأسفل في $x \in (0, 3)$]

■ [١٥] $y = \sqrt[3]{x+1}$ د (س) محدب لأعلى في $x \in (0, 1)$

[محدب لأعلى في $x \in (0, 1)$]

■ [١٦] $y = \sqrt[3]{x+1} - 9$ د (س) محدب لأسفل في $x \in (0, 1)$

[محدب لأسفل في $x \in (0, 1)$]

■ [١٧] $y = (x + 2)^3$ د (س) محدب لأعلى في $x \in (0, 2)$

[محدب لأعلى في $x \in (0, 2)$]

■ [١٨] $y = \frac{5}{3}(x + 3)$ د (س) محدب لأعلى في $x \in (0, 3)$

[محدب لأعلى في $x \in (0, 3)$]

■ [١٩] $y = \sqrt[3]{1-x} - 4$ د (س) محدب لأسفل في $x \in (0, 1)$

[محدب لأسفل في $x \in (0, 1)$]

■ [٢٠] د (س) = $3س^2 - 3س^3$

[محدب لأسفل في $[-\infty, 1]$ ولأعلى في $[1, \infty)$] (٢، ١) انقلاب

■ [٢١] د (س) = $3س^3 - 9س^2 + 24س - 7$

[محدب لأعلى في $[-\infty, 3]$ ولأسفل في $[3, \infty)$] (١١، ٣) انقلاب

■ [٢٢] د (س) = $(1 - س)(2 - س)^2$

[محدب لأعلى في $[-\infty, \frac{5}{3}]$ ولأسفل في $[\frac{5}{3}, \infty)$] (٢، ١) انقلاب

■ [٢٣] د (س) = $8س^4 - 6س^3 + 12س^2 - 8س$

[لأسفل في $[-\infty, 1]$ ، $[1, 2]$ ولأعلى في $[2, \infty)$] (١، ١) انقلاب

■ [٢٤] د (س) = $\sqrt[3]{(8 + س)}$

[لأسفل في $[-\infty, 0]$ ، $[0, 4]$ ولأعلى في $[4, \infty)$] (٤، ٠) انقلاب

■ [٢٥] د (س) = $5س^5 - 3س^4 + 3س^3$

[لأعلى في $[-\infty, 0]$ ، $[0, 3]$ ولأسفل في $[3, \infty)$] (٣، ٠) انقلاب

■ [٢٦] د (س) = $|3 - س|$

[لأسفل في $[-\infty, 1]$ ، $[1, 3]$ ولأعلى في $[3, \infty)$] (٣، ١) انقلاب

■ [٢٧] د (س) = $\frac{1 + س^2}{3 + س^2}$

[لأعلى في $[-\infty, 1]$ ، $[1, \infty)$ ولأسفل في $[-1, 1]$] (١، ١) انقلاب

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب لكل من الدوال الآتية :

■ [٢٨] د (س) = $2س^3 - 9س^2 + 12س - 10$

[(١، ٠) ع.م.، (٢، ٦) ص.م.، $(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$] انقلاب

■ [٢٩] د (س) = $84س^4 - 24س^2 + 84$

[(٢، ٦٠) ص.م.، (٠، ٨٤) ع.م.، (٢، ٤) انقلاب]

■ [٣٠] د (س) = س (س - ٣)

[صغرى عند س = $\frac{3}{4}$ ، انقلاب عند س = $\frac{3}{2}$ ، س = ٣]

■ [٣١] د (س) = س^٥ - ٥س - ١

[صغرى عند س = ١ ، عظمى عند س = - ١ ، انقلاب عند س = ٠]

■ [٣٢] د (س) = $\frac{٦س}{٣ + ٢س}$

[صغرى عند - ٣/٢ ، عظمى عند ٣/٢ ، انقلاب عند - ٣ ، ٠]

■ [٣٣] أوجد معادلة المماس الانقلابي للمنحنى : ص = س^٣ - ٦س^٢ + س - ٢

[١١س + ص - ٦ = ٠]

■ [٣٤] أوجد قيم ٩ ، ب بحيث أن المنحنى ص = س^٣ + ٩س^٢ + ب س يكون له نقطة

انقلاب عند (١ ، - ٢) [٩ = ب ، - ٢ = ١]

■ [٣٥] عيّن المنحنى ص = س^٣ + ب س^٢ + ج س + د الذى يمر بالنقطة (٤ ، ٠) وتكون

النقطة (١ ، - ٢) نقطة انقلاب بالنسبة له وبحيث يكون المماس عندها أفقياً.

[ص = س^٣ + ٦س^٢ + ٤س]

■ [٣٦] أوجد ٩ ، ب ، ج ، د بحيث يحقق المنحنى المعطى بالمعادلة :

ص = س^٣ + ب س^٢ + ج س + د الشروط التالية :

(١) يمر بالنقطة (١ ، ٥).

(٢) النقطة (٢ ، ١) نقطة انقلاب للمنحنى .

(٣) المماس عند (٢ ، ١) معادلته هي ٢س + ص = ٧

[٩ = ١٥ ، ١٠ = ج ، ٦ = ب ، ١ = د]

■ [٣٧] أوجد قيم P ، B ، J ، S بحيث يحقق المنحنى المعطى بالمعادلة :

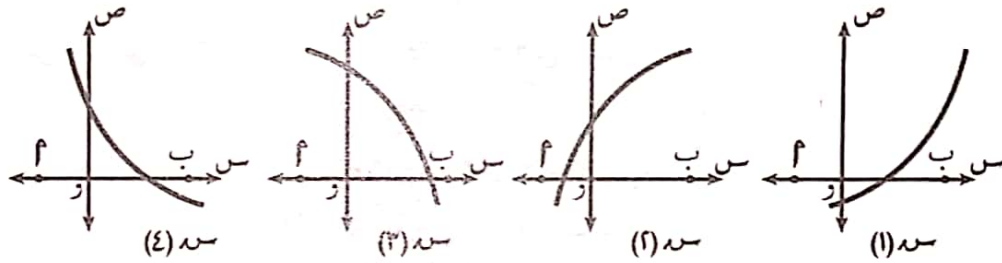
د (س) $P = S^3 + B S^2 + J S + S$ الشروط التالية :

(١) النقطة (٣ - ، ١) صغرى محلية (٢) النقطة (٢ ، ١) نقطة انقلاب

[$P = 1$ ، $B = -6$ ، $J = 9$ ، $S = -1$]

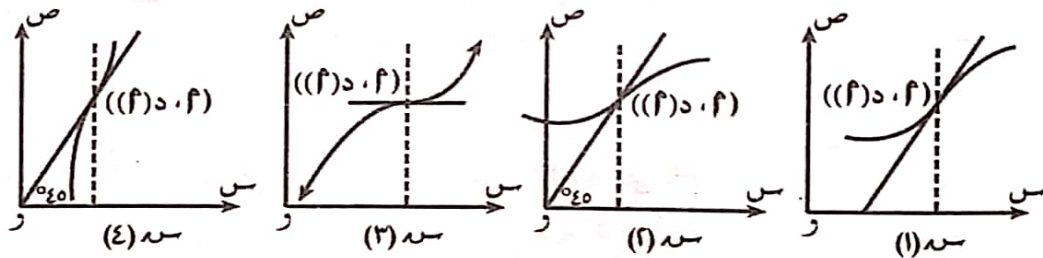
■ [٣٨] إذا كان $D'(S) > 0$ ، $D''(S) > 0$ لكل $S \in [P, B]$ فأذكر أيًا من المنحنيات المبينة

بالأشكال الآتية يمثل الدالة D في $[P, B]$.



■ [٣٩] إذا كان $D'(P) = 1$ ، $D''(P) = 0$ ، $D''(P) < 0$ ، $D''(P) > 0$ أذكر أي من

المنحنيات الآتية يحقق هذه الشروط الأربعة عند $S = P$ معطياً الأسباب :



ارسم الشكل العام لكل من منحنيات الدوال الآتية :

■ [٤١] د (س) $S^3 - 3S^2 + 4$

■ [٤٠] د (س) $S^3 - S$

■ [٤٣] د (س) $S^3 - 6S^2 + 9S + 2$

■ [٤٢] د (س) $\frac{1}{3}S^3 - S^2$

■ [٤٥] د (س) $(S - 2)(S + 1)^2$

■ [٤٤] د (س) $2 - S(S - 3)^2$

■ [٤٦] د(س) = $٢س^٣ + ٢س + ١٥$ علماً بأن د(٢) = ١٥ هي قيمة عظمى محلية،

د(١) = ١٢ هي قيمة صغرى محلية ومبيناً الفترات التي يكون فيها منحنى هذه الدالة

محدباً إلى أعلى وتلك التي يكون فيها محدباً إلى أسفل وعين نقطة الانقلاب إذا وجدت .

[لأعلى في $[-\infty, -٠,٥]$ ولأسفل في $[-٠,٥, \infty]$ ، النقطة $(٠,٥, ١,٥)$ انقلاب]

مجموعة الكتاب المدرسي :

تمارين (١-٣) من الكتاب المدرسي

حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د في كل مما يأتي :

$$(١) د(س) = ٢س^٢ - ٤س \quad (٢) د(س) = (٣-س)^٢$$

$$(٣) د(س) = ٢س^٢ - ٦س + ٥ \quad (٤) د(س) = ٩س - ٢س^٢$$

$$(٥) د(س) = ٤س^٤ + ٤س \quad (٦) د(س) = ٢ - ٣(٢-س)^{\frac{٤}{٣}}$$

$$(٧) د(س) = ١ - \frac{١}{س} \quad (٨) د(س) = \frac{٢-س}{٢+س}$$

$$(٩) د(س) = \frac{\sqrt{١-س}}{س} \quad (١٠) د(س) = ١ + \frac{١}{س}$$

$$(١١) د(س) = ٣ - \frac{١}{س^٢} \quad (١٢) د(س) = ٥ - ٢س^٢$$

أجب عما يأتي :

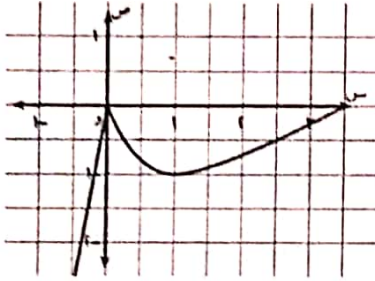
$$(١٣) أثبت أن الدالة د حيث د(س) = ٤س - ٣س^٢ متزايدة على الفترة $[٠, \frac{\pi}{٤}]$$$

$$(١٤) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = ١ - ٣س ، ٠ < س < ٢\pi$$

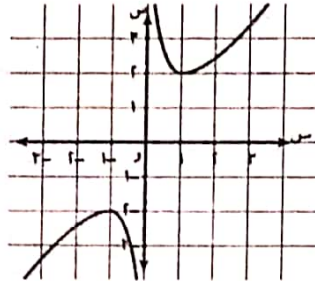
$$(١٥) إذا كانت د ، د' دالتين قابلتين للاشتقاق ، د' > (س) لكل س ، فأثبت أن الدالة د حيث د(س) = د(س) - د'(س) متناقصة لكل س .$$

تمارين (٢-٣) من الكتاب المدرسي

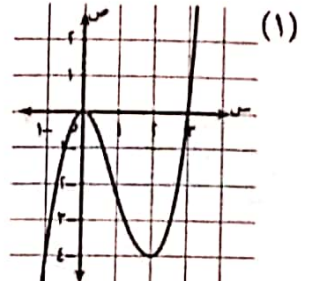
حدد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة في الأشكال التالية وبيّن نوعها :



(٣)



(٢)



(١)

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د في كل مما يأتي مبيناً نوعها :

(٥) د (س) = $س^٢ - ٤س$

(٤) د (س) = $س^٣ + ٣س^٢ + ٢$

(٧) د (س) = $٣س^٢ - ٥س$

(٦) د (س) = $٤س - ٣س^٢$

(٩) د (س) = $\frac{٢}{٣} (٢ + س)$

(٨) د (س) = $\frac{٢}{٣} س - ٣$

(١١) د (س) = $\frac{٤}{١-س} + س$

(١٠) د (س) = $\frac{٤}{٢س} + س$

(١٣) د (س) = $٤س - ٤س^٢$

(١٢) د (س) = $\frac{٣}{٢-س}$

(١٥) د (س) = $٣س + ٣س^٢$

(١٤) د (س) = $٣س - ٣س^٢$

(١٧) د (س) = $٨س - ٨س^٢$

(١٦) د (س) = $س - ٨س^٢$

(١٨) د (س) = $(١ - س)س$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة :

(١٩) د (س) = $س^٣ - ٣س + ١$ ، س $\in [١, ٢]$

(٢٠) د (س) = $\sqrt{١-س}$ ، س $\in [٠, ١]$

(٢١) د (س) = $س$ جتا س + جتا س ، س $\in [٠, \pi]$

(٢٢) د (س) = $س$ هـ س ، س $\in [٠, ٢]$

أجب عما يلي :

(٢٣) تفكير إبداعي : أوجد قيم P ، b ، c ، e بحيث يحقق المنحنى

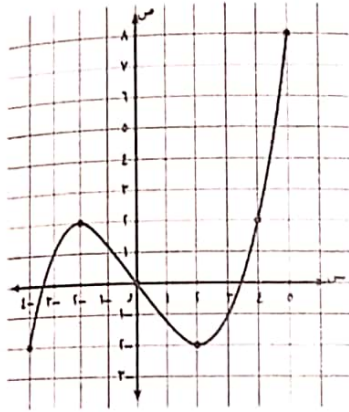
د (س) $P = ٢س + ٢س + ٢س + ٢س + ٢س$ الشروط التالية معاً :

(أ) يمر بنقطة الأصل.
(ب) له نقطة حرجة عند $s = ١$

(ج) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٢) د (٢) عليه هي $٩س + ص = ٢٠$

تمارين (٣-٣) من الكتاب المدرسي

(١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث $ص = د(س)$ ، أكمل :



(أ) مجال د =

(ب) $د'(س) = ٠$ عندما $س \in$

(ج) $د''(س) < ٠$ عندما $س \in$

(د) المنحنى محدب لأعلى عندما $س \in$

(هـ) للمنحنى نقطة انقلاب هي

(و) للدالة قيمة صغرى محلية عند $س =$

(ز) للدالة قيمة عظمى مطلقة تساوي

ابحث فترات تحذب الدالة د ثم أوجد احداثيات نقط الانقلاب (إن وجدت) لكل مما يأتي :

$$(٢) د(س) = ٣س^٢ - ٦س - ٤ \quad (٣) د(س) = ٣س^٢ - ٢س + ١$$

$$(٤) د(س) = ١٥س + ٦س^٢ - ٢س^٣ \quad (٥) د(س) = ٨س^٢ - ٤س + ١٦$$

$$(٧) \frac{١ - ٢س}{٤ - ٢س}$$

$$(٦) د(س) = \frac{٦}{٣ + ٢س}$$

$$(٨) ٣ \left\{ \begin{array}{l} ٣س^٢ - ٢س \text{ عندما } ٠ < س \\ ٤س - ٢س^٢ \text{ عندما } ٠ \leq س \end{array} \right\} = د(س) \quad (٩)$$

(١٠) أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{س}{٢س - ١}$

يساوي $\frac{\pi}{٤}$

(١١) إذا كان لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س (س - ٣) قيمة عظمى محلية عند س_١، وقيمة صغرى محلية عند س_٢ فأثبت أن الإحداثي السيني لنقطة الانقلاب = $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$

(١٢) أوجد P، ب بحيث يكون للمنحنى س^٢ ص + P ص + ب س^٢ = ٠ نقطة انقلاب عند النقطة (١، -١) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذي له الخواص المعطاة في كل مما يأتي :

(١٣) د (٠) = ٤ د (٣) = ٤ ، د' (س) > ٠ لكل س > ٢ ، د' (س) < ٠ لكل س < ٢ ، د'' (س) < ٠
(١٤) د (١) = ٥ د (٥) = ٠ ، د' (س) > ٠ لكل س > ٣ ، د' (س) < ٠ لكل س < ٣ ، د'' (س) > ٠ لكل س ≠ ٣
(١٥) د (١-) = ٢ د (٠) = ٤ د (١) = ٠ ، د' (١) = د' (١-) ، د'' (س) > ٠ لكل س > ٠ ، د'' (س) < ٠ لكل س < ٠

(١٦) د (٣) = ٤ ، عند س > ٣ فإن د' (س) < ٠ ، د'' (س) < ٠ وعند س < ٣ فإن د' (س) > ٠ ، د'' (س) > ٠

ادرس تغيرات الدالة د وارسم الشكل العام لمنحنائها في كل مما يأتي :

(١٧) د (س) = س^٢ - ٦ س + ٥ (١٨) د (س) = س^٣ - ٣ س^٢

(١٩) د (س) = س^٣ - ٣ س^٢ + ٣ (٢٠) د (س) = $\frac{١}{س} - س - ٢$

(٢١) د (س) = $\frac{١}{٨} س - \frac{٣}{٢} س + ١$ (٢٢) د (س) = س - س (س - ٣)

(٢٣) د (س) = (س - ٢) (س + ١) (٢٤) د (س) = $\frac{١}{٨} (س + ٤) (س - ٢)$

(٢٥) د (س) = $\left. \begin{array}{l} س^٣ - ٣س^٢ \\ س^٢ - ٢س \end{array} \right\}$ عندما س < ٠ عندما س ≥ ٠

(٢٦) د (س) = |س - ٤|

تمارين (٣-٤) من الكتاب المدرسي

- (١) عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ، أوجد العددين.
- (٢) عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥ ، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن ، أوجد العددين.
- (٣) أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف إليه معكوسة الضربي كان الناتج أصغر ما يمكن.
- (٤) أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تحاط بسياس طولها ١٢٠ متراً.
- (٥) قطاع دائري محيطه ٣٠ سم ، ومساحته أكبر ما يمكن ، أوجد طول نصف قطر دائرته.
- (٦) علبة على هيئة متوازي مستطيلات ، قاعدتها مربعة الشكل. إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوي ٢٤٠ سم ، فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن.
- (٧) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوي ١٠ سم ، فأوجد طول كل من ضلعي القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.
- (٨) حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم. حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج ، وما مساحة هذه الأرض حينئذ ؟
- (٩) تصنع علب اسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات ، سعة كل منهما ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة ، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (نم).
- (١٠) ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرتين ، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ متراً ، فأوجد أكبر مساحة له.
- (١١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.
- (١٢) قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل ، بعدها ١٥ سم ، ٢٤ سم ، قطع من أركانها الأربعة مربعات متطابقة ، طول ضلع كل منها س سم ، ثم ثنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء. احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.
- (١٣) خزان مفتوح ، قاعدته مربعة ، وجوانبه رأسية ، يسع كمية معينة من الماء. أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوي نصف طول ضلع قاعدته.
- (١٤) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٥ ، ٠) وتقع على المنحنى $y = \frac{1}{x} - 2$.
- (١٥) أوجد أقصر بعد بين المستقيم $y = 2x + 10$ والمنحنى $y = 2x^2 - 4$.

(١٦) P ب ج مثلث حيث P' ، B' ثابتان. أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما والتي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(١٧) تعطي شدة التيارات (بالأمبير) في دائرة للتيار المتردد عند أي لحظة n (ثانية) بالعلاقة $i = 2 \sin \omega t$ جتا $\omega + 2$ ، ما أقصى قيمة للتيار في هذه الدائرة.

(١٨) ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعية في وسط غذائي طبقاً للعلاقة $dN/dt = 2000 - \frac{N^2}{10000}$ ،

حيث الزمن t مقيس بالساعات ، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة.

(١٩) P ب ج Δ مربع طول ضلعه 10 سم ، $M \in AB$ بحيث $BM = 3$ سم ، $N \in AC$ بحيث $AN = 3$ سم ،

$\frac{3}{2}$ س. أوجد قيمة S التي تجعل مساحة ΔPMN م N أصغر ما يمكن.

(٢٠) P ب قطر في دائرة طول نصف قطرها 10 سم مماسان للدائرة عند كل من P ، Q من النقطة H على الدائرة رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين من E ، F على الترتيب. أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف $PQEF$ ب ج E تساوي $2\sqrt{2}$ وحدة مربعة.

تمارين الكتاب المدرسي القامة على (الوحدة الثالثة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان $d : [-2, 4] \leftarrow$ ح ، د (س) $= s^3 - s^2$ فإن عدد النقط الحرجة للدالة d يساوي :

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٢) يكون للدالة d قيمة صغرى محلية إذا كانت d (س) تساوي :

(أ) $s^2 - 1$ (ب) $s^2 + 1$ (ج) s^3 (د) $s^3 - s^2$

(٣) منحنى الدالة d محدباً لأسفل في ح إذا كان d (س) تساوي :

(أ) $s^3 - 3$ (ب) $s^3 - 3$ (ج) $s^3 - 3$ (د) $s^3 + 3$

(٤) إذا كان لمنحنى الدالة d نقطة انقلاب عند $s = 2$ حيث $d'(s) = s^3 + s^2 + k$ فإن قيمة k تساوي :

(أ) -6 (ب) -3 (ج) 3 (د) 6

(٥) يكون للدالة d قيمة عظمى محلية إذا كانت d (س) تساوي :

(أ) $s^2 - 2$ (ب) $s^2 + 1$ (ج) $s^3 + 3$ (د) $s^3 - 2$

حدد فترات تزايد وتنقص الدالة د في كل مما يأتي :

$$(6) \text{ د (س) } = (س - 3)^2 \quad (7) \text{ د (س) } = 2س^2 - 3س$$

$$(8) \text{ د (س) } = (س + 4)^2 \quad (9) \text{ د (س) } = 5 + 4س - 2س^2$$

$$(10) \text{ د (س) } = 2س(س - 2) \quad (11) \text{ د (س) } = 4س - 4س^2$$

$$(12) \text{ د (س) } = 1 + \frac{1}{س} \quad (13) \text{ د (س) } = \frac{س}{س + 2}$$

$$(14) \text{ د (س) } = \sqrt[3]{1 - س}$$

حدد فترات التحدب للأسفل والتحدب لأعلى ونقط الانقلاب إن وجدت لكل من :

$$(15) \text{ د (س) } = (س - 1)^2 \quad (16) \text{ د (س) } = 3س^2 - 2س$$

$$(17) \text{ د (س) } = 6س^2 - 9 + 7 \quad (18) \text{ د (س) } = 12س - 7 + 2س^2$$

$$(19) \text{ د (س) } = 6س^2 - 4س^3 \quad (20) \text{ د (س) } = \frac{8}{س} - 2س^2$$

أوجد القيمة القصوى المحلية للدالة د إن وجدت في كل مما يأتي :

$$(21) \text{ د (س) } = 4 - 6س - 2س^2 \quad (22) \text{ د (س) } = 2س^2 - 3س + 7$$

$$(23) \text{ د (س) } = س(س - 2)^2 \quad (24) \text{ د (س) } = 8س^2 - 8س + 8$$

$$(25) \text{ د (س) } = \frac{س^2 - 1}{س + 2} \quad (26) \text{ د (س) } = \frac{س^2 - 3}{س - 2}$$

$$(27) \text{ د (س) } = \frac{4 - س}{9 + 2س} \quad (28) \text{ د (س) } = \sqrt[3]{(س - 2)^2}$$

$$(29) \text{ د (س) } = \sqrt[3]{4 - 2س}$$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة المعطاة لكل مما يأتي :

$$(30) \text{ د (س) } = 9 - 2س \quad [0, 2] \quad (31) \text{ د (س) } = 12س - 16 + 5 \quad [0, 3]$$

$$(32) \text{ د (س) } = 2 + 4س \quad [1, 2] \quad (33) \text{ د (س) } = 2س^2 - 4س + 1 \quad [1, 1]$$

$$(34) \text{ د (س) } = س(س - 2)(12 - 2س) \quad [1, 4] \quad (35) \text{ د (س) } = (س - 1)(س - 2)^2 \quad [0, 5]$$

$$(36) \text{ د (س) } = \left. \begin{array}{l} 2س^3 - 3س^2 \\ 2س^2 - 2س \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{عندما } س \geq 0 \\ \text{عندما } س < 0 \end{array} \quad [3, 3]$$

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذي له الخواص المعطاة في كل مما يأتي :

$$(37) \text{ د (س) } = (4, 3) = (4, 0) = (4, 0) \text{ د (س) } > 0 \text{ لجميع قيم س.}$$

$$(38) \text{ د (س) } = (2, 0) = (2, 0) = (2, 0) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما } س > 2 \text{ د (س) } > 0 \text{ عندما } س < 2$$

(٣٩) د (٣-) = ٨ ، د (٠) = ٤ ، د (٣) = ٠ ، د (س) < ٠ عندما س > ٣- وعندما س < ٣ ،

د (س) > ٠ عندما س > ٠ ، د (س) < ٠ عندما س < ٠

(٤٠) د (٠) = ٣ ، د (٢) = ٠ ، د (٢-) = ٠ ، د (س) > ٠ عندما ٢- > س > ٢ ، د (س) > ٠ عندما س > ٠ ،

د (س) < ٠ عندما س < ٠

ارسم الشكل العام لكل من المنحنيات التالية مبيناً عليها القيم القصوى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت:

(٤٢) د (س) = ٣ - ٢س - ٤س + ٣

(٤١) د (س) = ٤ - ٢س

(٤٤) د (س) = $\frac{1}{3}س - ٢س - ٤س + \frac{1}{3}$

(٤٣) د (س) = س (س + ٣)²

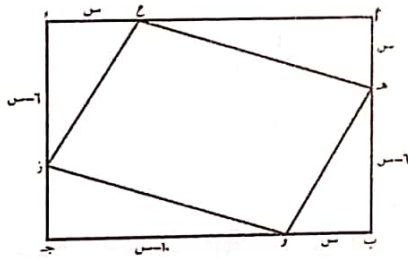
(٤٦) د (س) = ٣ + ٠س - ٢س

(٤٥) د (س) = ٢س² - ٩س + ١٢ - ٢

(٤٧) عين قيم ٢ ، ب ج ، ٤ للمنحنى ص = ٢س³ + ٢س² + ج س + ٤ بحيث تكون له قيمة عظمى

محلية عند (٠ ، ٦) وقيمة صغرى محلية عند (١ ، ٥) ثم ارسم المنحنى.

(٤٨) سلك طوله ٢٠ متراً يراد تشكيله على هيئة مستطيل. ما هي أبعاد المستطيل التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن.



(٤٩) في الشكل المقابل ٢ ب ج ٤ مستطيل :

(أ) أثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع مساحته

م = ٢س² - ١٦س + ٦٠

(ب) أوجد أصغر قيمة ممكنة للمساحة م.

(٥٠) قطعة من الورق على شكل قطاع دائري طول

نصف قطر دائرته ١٥ سم. طويت لتشكّل

سطح مخروط دائري قائم ارتفاعه ع سم. بين

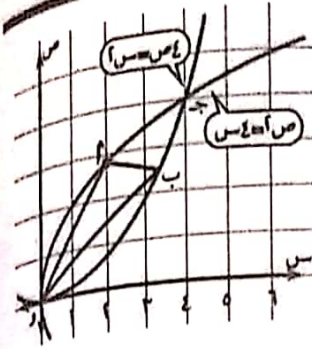
أن حجم المخروط ح سم³ يعطى بالعلاقة

$ح = \frac{\pi}{3} ع (٢٢٥ - ع²)$ ، ثم أوجد أكبر حجم

ممكّن لهذا المخروط.

(٥١) أوجد ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مفرغة طول نصف قطرها من الداخل

١٠ سم ، عندما تكون المساحة الجانبية للأسطوانة أكبر ما يمكن.



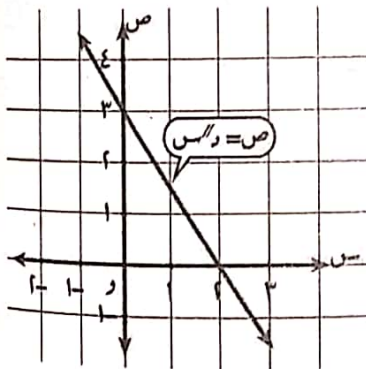
(٥٢) أثبت أنه لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$ تحقق المتباينة.

$$\frac{1}{2} \geq \frac{s}{s^2 + 2} \quad \text{حيث } 0 < s < 2$$

(٥٣) لتكن جـ نقطة تقاطع المنحنيين $s^2 = 4$ ، $s^2 = 2$ ، النقطة P تقع على المنحنى $s^2 = 4$ وإحداثياتها السينية يساوي ٢ ، النقطة $B(s, s)$ تقع على المنحنى $s^2 = 4$ بين النقطتين O ، J ، أوجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث OPB .

(٥٤) خزان مغطى للمياه ، مكون من متوازي مستطيلات ، قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها s^2 وارتفاعه s ، يعلوه أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها s^2 وارتفاعها s . إذا كان حجم الخزان الكلي ٢٧ متراً مكعباً فاحسب قيمة s التي تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن.

اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على (الوحدة الثالثة)



يبين الشكل المقابل منحنى $f(s)$ للدالة $f(s)$ ، أكمل :

(أ) منحنى $f(s)$ محدب لأعلى عندما $s \in \dots$

(ب) منحنى $f(s)$ له نقطة انقلاب عند $s = \dots$

(ج) إذا كان $f'(s) = (1-s)$ ، $f'(0) = 0$ فإنه يوجد للدالة $f(s)$

قيمة عظمى محلية عند $s = \dots$

(د) $f(s)$ متناقصة لكل $s \in \dots$

(٢) إذا كان $f(s) = s^2 + s + 2$ حيث $0 < s < 2$

(أ) ابحث وجود قيمة قصوى للدالة $f(s)$ مبيناً نوعها إن وجدت.

(ب) حدد فترات تزايد وتناقص الدالة $f(s)$ عندما $s \in \mathbb{R}$ ، $f'(s) = 0$

(٣) حدد النقط الحرجة وفترات التزايد والتناقص للدالة $f(s)$ حيث $f(s) = \sqrt[3]{(s-1)^2}$

(٤) إذا كان $f(s) = s^2 - 6s + 12$ ، ابحث وجود نقط حرجة للدالة $f(s)$ وحدد فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت ، ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى $f(s)$

(٥) ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة $f(s)$ حيث $f(s) = s^2$ إذا كان :

د متصلة ومجالها $[0, 1]$ ، $f'(s) = (1-s)$ ، $f'(s) = 0$ ، $f'(s) = 2$ غير موجودة ،

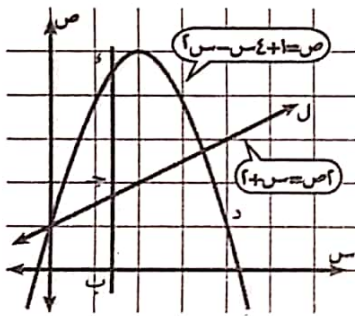
$f'(s) = 0$ عندما $s > 2$ ، $f'(s) = 0$ عندما $s < 2$ ، $f'(s) = 0$ عندما $s = 2$

$$(٦) \text{ إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على ح ، د(س) = } \left\{ \begin{array}{ll} \text{س}^٢ + \text{س} + ب & \text{عندما } \text{س} \leq ١ \\ ٣\text{س} - \text{س}^٢ & \text{عندما } \text{س} > ١ \end{array} \right.$$

(أ) أوجد قيم الثابتين ب ، ب

(ب) حدد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت.

(٧) من مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) للأعداد الصحيحة غير السالبة والتي مجموع مسقطيها ٥ ، أوجد الزوج المرتب الذي يجعل حاصل ضرب مربع المسقط الأول ومكعب المسقط الثاني أكبر ما يمكن.



(٨) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د ، والمستقيم ل

إذا كان المستقيم ب موازي لمحور الصادات ويقطع

الجزء الموجب لمحور السينات ، والمستقيم ل ومنحنى د في

النقط ب ، ج ، د على الترتيب فأوجد إحداثي النقطة ب التي

تجعل ج د أكبر ما يمكن.

اختبارات كتاب لامى للصف الرابع على (الوحدة الثالثة)

الاختبار الأول

السؤال الأول :

(١) أكمل ما يأتى . :

(١) إذا كانت د دالة كثيرة حدود وكان د لها قيمة صغرى محلية عند س = ٢

فإن د' (٢) =

(٢) المنحنى د (س) = س^٤ - ٨س^٣ + ٢٢س^٢ - ٢٤س + ١٢ في [-٤ ، ٤] له قيمة صغرى

مطلقة =

(ب) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(٣) إذا كانت النقطة (٣ ، -١) ∈ منحنى الدالة د وكان د' (٣) = صفر فإن هذه النقطة

تسمى

[نقطة حرجة أ ، نقطة انقلاب أ ، قيمة عظمى مطلقة أ ، قيمة صغرى مطلقة]

(٤) منحنى الدالة د (س) = (س + ٢)^٣ محذب لأسفل على الفترة

[-∞ ، -٢) ، [-٢ ، ∞) ، (-٢ ، ٠) ، [٠ ، ∞)]

السؤال الثاني :

- (٢) ابحث تحذب المنحنى د (س) $= س^٥ - س^٥ + ٣$ وعين نقطة الانقلاب (إن وجدت) .
 (ب) أوجد ٢ ، ٣ بحيث أن الدالة د (س) $= س^٢ + ٢س + ٣$ يكون لها نقطة حرجة عند
 $س = ٢$ ، د (٢) = ١ ، ثم عين نوع النقطة (٢ ، ١) من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية .

الاختبار الثاني

السؤال الأول :

(٢) أكمل ما يأتي :

- (١) المنحنى د (س) $= س^٣ - ٣س^٢ - ٢٤س + ٥٠$ في $[-٥, ٣]$ له قيمة عظمى مطلقة عند
 $س = \dots\dots\dots$

- (٢) إذا كان د (س) < ٠ في الفترة $[-١, ٥]$ فإن منحنى الدالة يكون $\dots\dots\dots$ في الفترة $[٤, ٠]$
 (ب) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

- (٣) إذا كان منحنى الدالة د (س) $= س^٤ + ١٨س^٣ + ٢س$ له نقطة انقلاب عند $س = ٢$ فإن
 $٢ = \dots\dots\dots$

$[٢, ٣]$ ، $[٣, ٤]$ ، $[-٣, ٢]$ ، $[-٢, ٣]$

- (٤) المنحنى د (س) $= س^٥ - س^٥ + ٣$ محدب لأعلى على الفترة $\dots\dots\dots$

$[-١, ٠]$ ، $[٠, ٣]$ ، $[٣, ٥]$ ، $[-٥, ٣]$ ، $[-٣, ١٥٩]$

السؤال الثاني :

- (٢) أوجد مساحة أكبر مستطيل من الأرض ملتصق بحائط يمكن إحاطته بسور طوله ٦٠ متراً .

(ب) أوجد قيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إذا علم أن المنحنى الذي معادلته

$ص = س^٣ + ٣س^٢ + ٣س + ٤$ يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة عند $س = ٢$ وقيمة

صغرى محلية = د (٤) ، والمماس له عند $س = ١$ معادلته هي $٩س - ص + ٧ = ٠$

الوحدة الرابعة:

التكامل المحدد وتطبيقاته

- ١- طرق التكامل
- ٢- تكامل الدوال المثلثية
- ٣- التكامل المحدد
- ٤- المساحات في المستوى
- ٣- حجوم الأجسام الدورانية

تمارين عامة
تمارين واختبارات الكتاب
اختبارات لامي

التكامل المحدد وتطبيقاته

التكامل غير المحدد

تعريف التكامل غير المحدد :

\int د (س) . د س = ت (س) + ث (حيث ت (س) هي المشتقة العكسية ، ث هو ثابت اختياري)

قواعد التكامل غير المحدد :

$$(هـ) \int \frac{1+u}{1+u} du = \int 1 du = u + C$$

$$(هـهـ) \int \frac{1+u}{1+u} du = \int 1 du = u + C$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1+u}{1+u} du = \int 1 du = u + C$$

$$(هـهـهـ) \int \frac{1+u}{1+u} du = \int 1 du = u + C$$

$$(هـهـهـهـ) \int \frac{1+u}{1+u} du = \int 1 du = u + C$$

التكامل بالتعويض :

إذا كانت ع = ع (س) قابلة للاشتقاق فإن :

$$\int f(x) dx = \int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du$$

الخطوات المتبعة عند حل مسائل التكامل بالتعويض :

أولاً: نفرض الاختيار المناسب للمتغير $ص$ حيث $ص = د(س)$

$$\text{ثانياً: نوجد } د = ص \cdot د'(س) \cdot د(س) \text{ ، ونحسب } د(س) = \frac{د(ص)}{د'(س)}$$

ثالثاً: نعوض بـ $ص$ بدلاً عن $د(س)$ ، ونعوض بـ $د(ص)$ بدلاً عن $د'(س)$. ونضع التكامل

بدلالة المتغير $ص$ بحيث يصبح في صورة يمكن تطبيق قواعد التكامل السابقة عليها .

➤ ملاحظات هامة : إذا لم يكن من الممكن تطبيق قواعد التكامل على الصورة الأخيرة فإننا نبحث

عن اختيار مختلف للمتغير $ص$.

رابعاً: نطبق قواعد التكامل ونحسب التكامل الناتج بعد عملية التعويض

خامساً: نكتب الناتج بدلالة المتغير الأصلي $س$.

التكامل بالتجزئي :

$$\boxed{[ص \cdot د(ص) - \int د(ص) \cdot د'(ص) د(ص)]}$$

تسمى المعادلة بهذه الصورة معادلة التكامل بالتجزئي ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

ليست أحدهم مشتقة للآخرى .

جدول التكمالات الأساسية

الدالة د : د (س) =	مشتقة عكسية للدالة د : ت (س) =
٢ (ثابت)	٢ س
س ^١ ، ١ - ≠	$\frac{س^{١+١}}{١+١}$
٢ س ^١ ، ١ - ≠	$\frac{س^{١+١}}{١+١} \times ٢$
هـ س	هـ س + ث
٢ س	$٢ س + \frac{١}{٢} \times ث$
$\frac{1}{س}$	لو هـ س + ث
جتا س	جا س
جا س	- جتا س
جتا ٢ س	$\frac{١}{٢} جا ٢ س$
قا ^٢ س	ظا س
قتا ^٢ س	- ظتا س
قا س ظا س	قا س
قتا س ظتا س	- قتا س
د (س) ^١ × د' (س) ، ١ - ≠	$\frac{د(س)^{١+١}}{١+١}$

➤ ملاحظات هامة :

(١) بعض التكاملات الأخرى :

$\frac{1}{p} - \text{جتا } (p + ب)$	جا $(p + ب)$
$\frac{1}{p} \text{ جا } (p + ب)$	جتا $(p + ب)$
$\frac{1}{p} \text{ ظا } (p + ب)$	قا $(p + ب)$
$\frac{1}{p} - \text{ظتا } (p + ب)$	قتا $(p + ب)$
$\frac{1}{p} \text{ قا } p \text{ س}$	قا $p \text{ س ظا } p \text{ س}$
$\frac{1}{p} - \text{قتا } p \text{ س}$	قتا $p \text{ س ظتا } p \text{ س}$
لو هـ قا س	ظا س
- لو هـ قتا س	ظتا س

(٢) إذا كان : $\frac{وس}{س} = ٣ س$ مثلاً فإن : $وس (تفاضلة ص) = ٣ س . وس (تفاضلة س)$

(٣) من المفيد تذكر العلاقات الآتية :

$$\frac{1}{٢} = \text{جا}^٢ س = (١ - \text{جتا}^٢ س) ،$$

$$\frac{1}{٢} = \text{جتا}^٢ س = (١ + \text{جتا}^٢ س) ،$$

$$\text{ظا}^٢ س = \text{قا}^٢ س - ١ ،$$

$$\text{ظتا}^٢ س = \text{قتا}^٢ س - ١$$

التكامل المحدد

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل :

إذا كانت d (س) دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ ،
وكانت t (س) مشتقة عكسية لهذه الدالة في هذه الفترة

$$\text{فإن : } \int_a^b d(s) = t(b) - t(a)$$

خطوات الحل :

- (١) نوجد مشتقة عكسية للدالة d في الفترة $[a, b]$ وهي t (س)
- (٢) نعوض عن s بالحد العلوي للتكامل في t (س) أي نوجد $t(b)$
- (٣) نعوض عن s بالحد السفلي للتكامل في t (س) أي نوجد $t(a)$
- (٤) بطرح ناتج الخطوة (٢) - (٣) نحصل على قيمة التكامل المحدد .

خواص التكامل المحدد :

إذا كانت d (س) ، r (س) دوال متصلة في $[a, b]$ ، وكانت $\exists [a, b]$ ، فإن :

$$(١) \int_a^b d(s) + \int_a^b r(s) = \int_a^b (d(s) + r(s))$$

$$(٢) \int_a^b d(s) = - \int_b^a d(s)$$

$$(٣) \int_a^b k \cdot d(s) = k \int_a^b d(s)$$

أي أن : التكامل المحدد (الثابت \times دالة) = الثابت \times التكامل المحدد لهذه الدالة

$$(٤) \int_a^b d(s) - \int_a^b r(s) = \int_a^b (d(s) - r(s))$$

$$(٥) \int_a^b d(s) + \int_b^c d(s) = \int_a^c d(s)$$

$$(٦) \int_a^b d(s) = \int_a^c d(s) + \int_c^b d(s) \text{ حيث } d \text{ دالة زوجية}$$

$$(٧) \int_a^b d(s) = - \int_b^a d(s) \text{ حيث } d \text{ دالة فردية}$$

بعض تطبيقات التكامل المحدد

يستخدم التكامل المحدود في حل مشكلات تتضمن مساحة المناطق المستوية ، حجوم الاجسام الدورانية

أولاً : مساحة المناطق المستوية

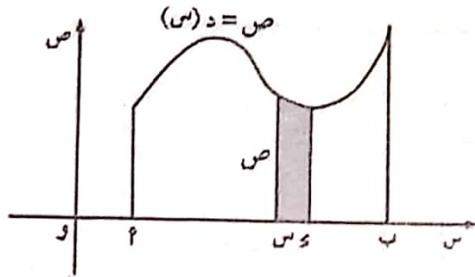
➤ نظرية هامة :

إذا كانت $D(s)$ دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ ،

$D(s) \geq 0$ في هذه الفترة ،

M هي مساحة المنطقة المستوية المحدودة بمنحنى الدالة D

ومحور السينات ، $a = s$ ، $b = s$ فإن :



$$M = \int_a^b D(s) ds$$

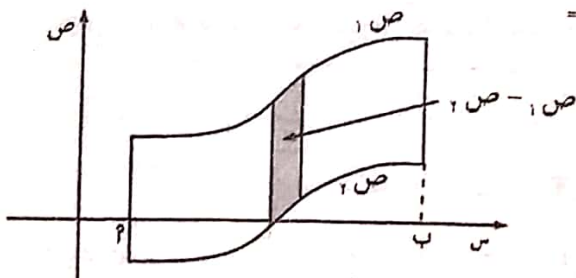
➤ ملاحظة هامة :

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى أي دالة متصلة $D(s)$ و

محور السينات والمستقيمين $s=a$ ، $s=b$ هي :

$$M = \int_a^b |D(s)| ds$$

مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين :



إذا كان : $D_1(s) \geq D_2(s)$ ،

$M = \int_a^b (D_1(s) - D_2(s)) ds$

متصلتين على فترة ما فإن :

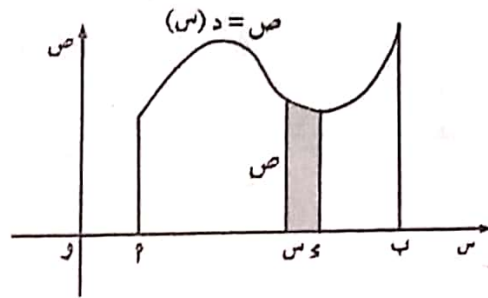
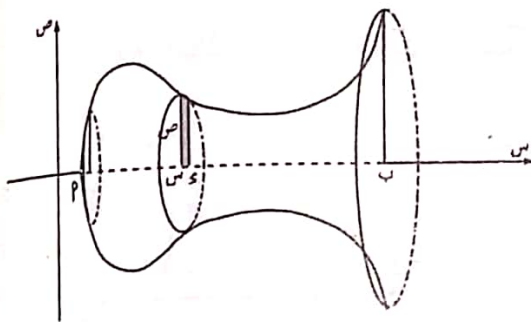
$$M = \int_a^b (D_1(s) - D_2(s)) ds$$

ثانياً : حجوم الأجسام الدورانية

تعريف الجسم الدوراني :

هو الجسم الذي ينشأ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها (يسمى محور الدوران) .

حجم جسم ناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور السينات باستخدام التكامل :



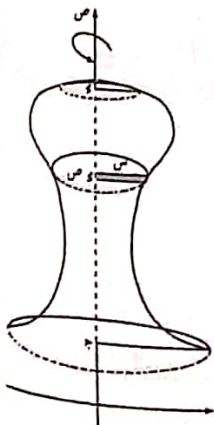
إذا كانت المنطقة المستوية الدائرة محدودة بمنحنى الدالة

$y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$

فإن : حجم الجسم الدوراني $V = \int_a^b \pi y^2 dx$ حيث :

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

حجم جسم ناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور الصادات باستخدام التكامل :



إذا كانت المنطقة المستوية الدائرة محدودة بمنحنى الدالة

$x = g(y)$ ومحور الصادات والمستقيمين $y = c$ ، $y = d$ ،

$y = c$ فإن حجم الجسم الدوراني $V = \int_c^d \pi x^2 dy$ حيث :

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

إيجاد حجم جسم ناشئ من دوران منطقة محصورة بين منحنين :

مثل $ص = د (س) \dots\dots\dots (١)$ ،

$ص = ر (س) \dots\dots\dots (٢)$

نتبع الآ . :

(١) نوجد نقطتي تقاطع المنحنين بحل معادلتيهما جبرياً ولتكونا $(س_١, ص_١)$ ، $(س_٢, ص_٢)$

(٢) إذا كان الدوران حول محور السينات :

$$|د (س)| \leq |ر (س)| \text{ لكل } س \in [س_١, س_٢]$$

فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة الواقعة بينهما $ح_٢ - ح_١$

$$\pi = \int_{س_١}^{س_٢} ([د (س)]^2 - [ر (س)]^2) . دس$$

وإذا كان الدوران حول محور الصادات :

$$|د (ص)| \leq |ر (ص)| \text{ لكل } ص \in [ص_١, ص_٢]$$

فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة الواقعة بينهما $ح = ح_٢ - ح_١$

$$\pi = \int_{ص_١}^{ص_٢} ([د (ص)]^2 - [ر (ص)]^2) . دص$$

➤ يلاحظ أن :

هذه القوانين تظل صحيحة لأي فترة جزئية لفترة تقاطع المنحنين وكذلك في حالة تقاطع المنحنين في أكثر من نقطتين .

تمارين على الوحدة الرابعة

المجموعة الأولى:

➤ مسائل موضوعية على كامل الوحدة

أولاً: أكمل ما يـأ : .

[١] ■ $\int_0^3 \frac{s^2 - 1}{s + 1} ds = \dots\dots\dots$

[٢] ■ $\int_0^2 (1 + s^3) ds = \dots\dots\dots$

[٣] ■ $\int \frac{s}{(4 + s^3)^3} ds = \dots\dots\dots$

[٤] ■ $\int_0^3 \frac{ds}{1 + s\sqrt{s}} = \dots\dots\dots$

[٥] ■ $\int_0^1 (2s^3 + 1) \times 4s^2 ds = \dots\dots\dots$

[٦] ■ إذا كان : $\int_0^6 6s ds = 30$ فإن $P = \dots\dots\dots$

[٧] ■ إذا كان : $\int_0^6 d(s) ds = 10$ ، $\int_0^3 d(s) ds = 3$ فإن :

$\int_0^6 d(s) ds = \dots\dots\dots$

[٨] ■ $\int_0^2 \frac{ds}{1 - s\sqrt{s}} = \dots\dots\dots$

[٩] ■ $\int_0^{\pi} s \cdot \pi ds = \dots\dots\dots$

[١٠] ■ إذا كان : $\int_0^1 s^2 ds = \frac{7}{3}$ فإن $k = \dots\dots\dots$

[١١] ■ إذا كان v دالة في s قابلة للاشتقاق فإن $v'(s)$ تساوى $\dots\dots\dots$

[١٢] ■ $\int_0^1 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{p} \right) ds = \dots\dots\dots$

- [١٣] $\left[\frac{1+s}{\sqrt{s^2+2s}} \cdot s \text{ يساوي } \dots \right]$
- [١٤] إذا كان $\left[\frac{s^2}{1+3s\sqrt{s^2+1}} \cdot s = \sqrt{s^2+1} \right]$ فإن $\dots = \dots$
- [١٥] إذا كانت د (س) = |س| فإن \int_{-1}^1 د (س) · س = \dots
- [١٦] إذا كان \int_1^3 د (س) · س = ٥ ، \int_3^4 د (س) · س = ٢ ،
- \int_1^4 د (س) · س = ٦ فإن \int_1^4 د (س) · س = \dots
- [١٧] إذا كانت ت مشتقة عكسية للدالة د ، وكانت ت (س) = س^٥ فإن \int_{-1}^1 د (س) · س = \dots
- [١٨] إذا كان \int_1^4 د (س) · س + \int_1^4 د (س) · س = \int_1^4 د (س) · س فإن ب
- تساوي \dots
- [١٩] مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س^3$ ، $ص = س^٥$ حيث $س \in [1, 1]$
- تساوي \dots
- [٢٠] مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = س^٢ + ٤$ ومحور السينات والمستقيمان $ص = ١ - س$ ، $ص = ٢$ تساوي \dots
- [٢١] إذا دارت المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $ص = ٢\sqrt{s}$ ، $ص = ٠$ ، $س = ١$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران يساوي \dots
- [٢٢] مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س^٢$ ، $ص = |س|$ تساوي \dots
- [٢٣] حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيات :
- $ص = س^٢$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٠$ حول المستقيم $ص = ٢$ يساوي \dots
- [٢٤] مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المستقيمتين $ص = س$ ، $ص = ٠$ ، $س = ١$ تساوي \dots
- [٢٥] مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س^3$ ، $ص = س$ تساوي \dots

ثانياً : أختَر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

■ [٢٦] إذا كان $\int_{-2}^1 f(x) dx = 5$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 7$ فإن $\int_{-2}^3 f(x) dx =$ [٤ - ، ٨ - ، ٨ ، ٤]

■ [٢٧] إذا كانت د (س) دالة متصلة على $[٠, ٣]$ ، وكان $\int_0^3 (٤ + س) dx = ٢٢$ ،

فإن $\int_0^3 د(س) dx$ يساوى [٢ - ، ٢ - ، ١٠ - ، ٢,٦ -]

■ [٢٨] $\int_3^4 \frac{١-س^٢}{١-س} dx$ يساوى [٣ ، ٤,٥ ، ٧,٥ ، ١٢]

■ [٢٩] $\int_1^2 \frac{١-س^٣}{١-س} dx$ يساوى [$\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{١١}{٦}$ ، $\frac{٢٩}{٦}$ ، ٤,٩]

■ [٣٠] $\int_1^2 |١-س| dx$ يساوى [$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٦} -$ ، $\frac{١}{٤} -$ ، $\frac{١}{٤}$]

■ [٣١] إذا كان $\int_0^1 س dx = ١$ ، $\int_1^2 س dx = ٤$ + ث فإن $\int_0^2 س dx =$

[$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤} -$ ، $\frac{١}{٦} -$ ، $\frac{١}{٦}$]

■ [٣٢] إذا كان $\int_0^1 (١+س) dx = ١$ ، $\int_1^2 (١+س) dx = ٢$ + ث فإن $\int_0^2 (١+س) dx =$

[$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٦} -$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٦}$]

■ [٣٣] $\int_0^1 \frac{س}{١+س^٢} dx$ يساوى [$\frac{١}{٢} (١+س^٢)$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢) -$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢) -$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢)$]

[$\frac{١}{٢} (١+س^٢)$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢) -$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢) -$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢)$]

[$\frac{١}{٢} (١+س^٢)$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢) -$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢) -$ ، $\frac{١}{٢} (١+س^٢)$]

■ [٣٤] $\int_0^1 (١+س)(١-س) dx$ يساوى [٥ ، ٦ ، $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{١٥}{٢}$]

[٣٥] ■ إذا كان $\int_{-p}^0 \frac{(s+2)^2}{p} ds = 12$ ، $p < 0$ فإن قيمة $p = \dots\dots\dots$

[٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦]

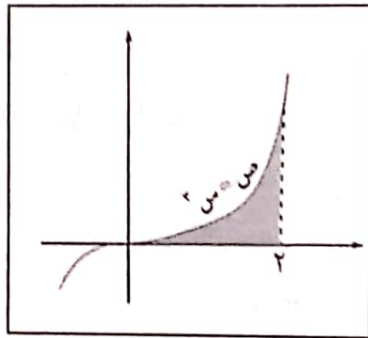
[٣٦] ■ إذا كان $\int_0^p s \cdot s^2 ds = 0$ فإن $p = \dots\dots\dots$ [١ ، ٢ ، ٢- ، ٢- ، ٢- ، ٢- ، ٢- ، ٢-]

[٣٧] ■ إذا كان $\int_1^3 s^{1-n} ds = \frac{8}{n}$ حيث $n \in \mathbb{R}$ فإن قيمة n تساوي $\dots\dots\dots$

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

[٣٨] ■ إذا كانت $t(s) = 3s^2 - 1$ مشتقة عكسية للدالة d حيث :

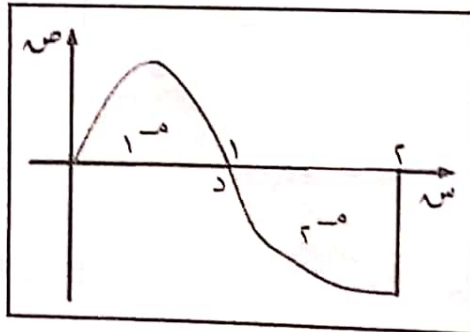
$t(s) = \int_{-p}^0 d(s) \cdot s ds = \dots\dots\dots$ [$\frac{2}{3}$ ، ١- ، ١١ ، ١٢-]



[٣٩] ■ مساحة المنطقة المظلمة في الشكل المجاور

تساوي $\dots\dots\dots$

[٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٦٤]



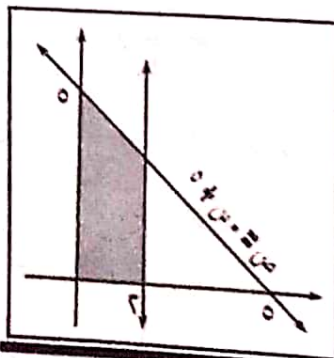
[٤٠] ■ الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة d

على $[0, 2]$ وكانت مساحة المنطقة

$M_1 = 10$ وحدات مساحة ، ومساحة

المنطقة $M_2 = 6$ وحدات مساحة فإن

$\int_0^2 d(s) \cdot s ds$ يساوي $\dots\dots\dots$ [١٦ ، ٤ ، ٤- ، ١٦-]



[٤١] ■ في الشكل المجاور :

مساحة المنطقة المظلمة المحصورة بين المستقيمين :

$s = 0$ ، $s = 2$ ومحوري الإحداثيات

يعبر عنها بالصيغة $\dots\dots\dots$

(i) $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$ (ii) $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$

(iii) $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$ (iv) $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$

■ [٤٢] إذا كان $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = 14$ فإن $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = \dots$

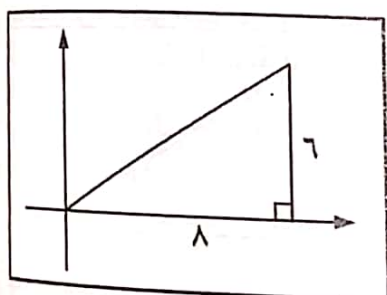
[٢ ، ١٦ ، ١ ، ٨]

■ [٤٣] إذا كان $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = 8$ ، $0 = (2)$ ، $8 = (6)$ فإن $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = \dots$

[٣ - ، ٣ ، ٤ ، ١٣]

■ [٤٤] إذا كان $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = 9$ ، $1 = (1)$ ، $9 = (4)$ ، $9 = (4)$ فإن $\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = \dots$

$\int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds = \dots$ [٣ ، ٢٦ ، ٥٢ ، ٥٢]



■ [٤٥] باستخدام التكامل في الشكل المجاور :

حجم الجسم الناتج من دوران المثلث حول

محور السينات = وحدة حجم .

[٦ ، ٦٨ ، ٩٦ ، ٩٦]

■ [٤٦] حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $\sqrt{s} + 1$

ومحور السينات والمستقيمين : $s = 1$ ، $s = -1$

[$\pi \frac{1}{5}$ ، $\pi \frac{2}{3}$ ، $\pi \frac{28}{15}$ ، $\pi \frac{56}{15}$]

■ [٤٧] حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى $\sqrt{s} = s$ ، والمستقيم

$\sqrt{s} = s$ حول محور الصادات يساوى

[$\pi \int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$ ، $\pi \int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$ ، $\pi \int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$ ، $\pi \int_0^2 \sqrt{s} \cdot \sqrt{s} \, ds$]

■ [٤٨] حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $\sqrt{s} = s$ ،

والمستقيم $\sqrt{s} = s$ حول محور السينات يساوى

[$\pi \frac{8}{5}$ ، $\pi \frac{8}{5}$ ، $\pi \frac{4}{5}$ ، $\pi \frac{4}{5}$]

■ [٤٩] $\pi \int_{-2}^2 (x-2)^2 dx$ هو حجم :

[كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة أ، كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات أ،

مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات أ، اسطوانة ارتفاعها ٤ وحدات أ]

■ [٥٠] مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ ، $y = x^3$ = ص

[$\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ ، ٢ ، ٣]

المجموعة الثانية :

➤ مسائل على طرق التكامل

أوجد التكاملات الآتية :

■ [١] $\int \frac{3}{26} (x^2 - 6)^{13} dx$ [$\frac{3}{26} (x^2 - 6)^{14} + C$]

■ [٢] $\int \frac{5x^2}{(x^2 - 3)^8} dx$ [$\frac{5}{7} (x^2 - 3)^{-7} + C$]

■ [٣] $\int \frac{1}{42} (5 + 3x^2)^7 dx$ [$\frac{1}{42} (5 + 3x^2)^8 + C$]

■ [٤] $\int (5 - x)^{-5} dx$ باستخدام طريقة التكامل بالتعويض .

■ [٥] $\int \frac{1}{16} (5 - x)^{-4} dx$ باستخدام طريقة التكامل بالتعويض .

■ [٥] $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ (حيث : $u = \sqrt{x}$ ، $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$)

■ [٦] $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ باستخدام طريقة التكامل بالتعويض :

■ [٦] $\int \frac{1}{27} (1 - x^3)^9 dx$ باستخدام طريقة التكامل بالتعويض :

■ [٧] $\int \frac{1}{25} (1 + 5x)^4 dx$ [$\frac{1}{25} (1 + 5x)^5 + C$]

■ [٨] $\int \frac{2 - x}{(5 + 3x - x^2)^2} dx$ بطريقتين مختلفتين .

$$\left[\frac{1}{6} (س + 1) + \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[\frac{1}{3} (س - 1) + \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[\frac{1 + \sqrt{2} (س + ب)}{1 + \sqrt{2}} \right]$$

$$\left[\frac{3 (س^2 + 3س)}{3} \right]$$

$$\left[\frac{1}{12} (س - 2) + \frac{1}{36} \right]$$

$$\left[\frac{1}{(س^3 - 5)9} - \frac{5 - س^2}{(س^3 - 5)6} \right]$$

$$\left[\frac{9}{4} (س^2 + 1) - \frac{2}{3} (س^2 + 1) + \frac{5}{40} \right]$$

(ثانياً) بطريقة التكامل بالتعويض

(ثانياً) بطريقة التكامل بالتعويض

(ثانياً) بطريقة التكامل بالتعويض

$$[9] \quad \left[س^3 \sqrt{س + 1} \right]$$

$$[10] \quad \left[-س^2 \sqrt{س - 1} \right]$$

$$[11] \quad \left[س^2 (س + ب) \sqrt{2} \right]$$

$$[12] \quad \left[(س^2 + 3س) (س^2 + 3س^2) \right]$$

$$[13] \quad \left[س^3 (س - 2) \right]$$

$$[14] \quad \left[\frac{5 - س^2}{3 (س^3 - 5)} \right]$$

$$[15] \quad \left[\frac{س^3}{1 + س^2 \sqrt{3}} \right]$$

$$[16] \quad \left[5س \sqrt{س + 3} \right]$$

(أولاً) بطريقة التكامل بالتجزئ

$$[17] \quad \left[س (س + 1) \right]$$

(أولاً) بطريقة التكامل بالتجزئ

$$[18] \quad \left[س^2 \sqrt{س - 2} \right]$$

(أولاً) بطريقة التكامل بالتجزئ

$$[19] \quad \left[س^3 \sqrt{س + 3} \right]$$

$$[20] \quad \left[(س^2 + 3) \sqrt{س - 1} \right]$$

$$[21] \quad \left[س^3 \sqrt{س - 1} \right]$$

$$[22] \quad \left[\frac{س^3 \sqrt{س + 1}}{س} \right]$$

■ [٢٣] $\left[\text{س} (٢ - \text{س}) \text{س} \right]$

■ [٢٤] أثبت أن : $\left[\text{س} (٦ + \text{س}) \text{س} = \frac{١}{١٤} (٦ + \text{س}) (١ - \text{س}) + \text{ث} \right]$

■ [٢٥] أثبت أن : $\left[\text{س} (٣ - \sqrt{٢ - \text{س}}) \text{س} = \frac{١}{١٥} (٣ - \text{س}) (٨ + \text{س}) + \text{ث} \right]$

■ [٢٦] أثبت أن : $\left[\frac{\text{س} \cdot \text{س}}{\sqrt[٣]{(٢ - \text{س})}} = \frac{٤}{٥} (٢ - \text{س}) + (٨ + \text{س}) + \text{ث} \right]$

■ [٢٧] أثبت أن : $\left[\frac{\text{س}^٣}{\sqrt[٣]{(٤ + \text{س})}} = \frac{٨ + \text{س}^٣}{٤ + \text{س}^٢} + \text{ث} \right]$

■ [٢٨] أوجد : $\left[\text{س} \text{ جا } \text{س} \cdot \text{س} \right]$

■ [٢٩] أوجد : $\left[\text{س} \cdot \text{هـ} \cdot \text{س} \right]$

■ [٣٠] أوجد : $\left[\text{لوه} \cdot \text{س} \cdot \text{س} \right]$

■ [٣١] أوجد : $\left[\text{س}^٤ \text{ لوه} \cdot \text{س} \cdot \text{س} \right]$

■ [٣٢] أوجد : $\left[\text{س}^٣ \text{ جا } (٢ \text{س}) \cdot \text{س} \right]$

■ [٣٣] أوجد : $\left[\text{س}^٥ \cdot \text{هـ} \cdot \text{س}^٣ \cdot \text{س} \right]$

■ [٣٤] أوجد : $\left[\text{س}^٣ \text{ جتا } (٥ \text{س}) \cdot \text{س} \right]$

المجموعة الثالثة :

➤ مسائل على تكامل الدوال المثلثية ومقلوباتها

أوجد التكاملات الآتية :

■ [١] $\left[\text{جا } ٣ \text{س} \cdot \text{س} \right]$

■ [٢] $\left[\text{جتا } ٤ \text{س} \cdot \text{س} \right]$

■ [٣] $\left[\text{قا } ٥ \text{س} \cdot \text{س} \right]$

■ $\left[-\frac{١}{٣} \text{ جتا } ٣ \text{س} + \text{ث} \right]$

■ $\left[\frac{١}{٤} \text{ جا } ٤ \text{س} + \text{ث} \right]$

■ $\left[\frac{١}{٥} \text{ ظا } ٥ \text{س} + \text{ث} \right]$

- [٤] ■ [قتا^٧ س . و س]
- [٥] ■ [قا^٧ س ظا^٧ س . و س]
- [٦] ■ [قتا^٨ س ظتا^٨ س . و س]
- [٧] ■ [جا^٢ (س - ٥) . و س]
- [٨] ■ [قا^٢ س ظا^٢ س . و س]
- [٩] ■ [قا^٣ س . و س]
- [١٠] ■ [جا^٢ س . و س]
- [١١] ■ [جتا^٥ س . و س]
- [١٢] ■ [ظا^٢ س . و س]
- [١٣] ■ [ظتا^٤ س . و س]
- [١٤] ■ [جتا^٣ س جا^٢ س . و س]
- [١٥] ■ [جا^٤ س جتا^٣ س . و س]
- [١٦] ■ [جتا^١ (س - ٣) . و س]
- [١٧] ■ [جا^٢ (س + ٥) . و س]
- [١٨] ■ [قا^٢ (س - ١) . و س]
- [١٩] ■ [قتا^٤ (س + ٣) . و س]
- [٢٠] ■ [قا^٣ (س + ١) ظا^٣ (س + ١) . و س]
- [٢١] ■ [قتا^٢ (س - ٥) ظتا^٢ (س - ٥) . و س]
- [- $\frac{1}{7}$ ظتا^٧ س + ث]
- [- $\frac{1}{7}$ قا^٧ س + ث]
- [- $\frac{1}{8}$ قتا^٨ س + ث]
- [- $\frac{1}{٩}$ جتا^٢ (س - ٥) + ث]
- [$\frac{٥}{٩}$ قا^٢ س + ث]
- [$\frac{1}{٣\sqrt{3}}$ ظا^٣ س + ث]
- [$\frac{1}{٩}$ (س - $\frac{1}{٩}$ جا^٢ س) + ث]
- [$\frac{1}{٩}$ (س + $\frac{1}{١٠}$ جا^١ س) + ث]
- [$\frac{1}{٣}$ ظا^٣ س - س + ث]
- [- $\frac{1}{٤}$ ظتا^٤ س - س + ث]
- [- $\frac{1}{٨}$ جتا^٤ س + ث]
- [$\frac{1}{١٥}$ جا^٥ س + ث]
- [- $\frac{1}{٣}$ جا^١ (س - ٣) + ث]
- [- $\frac{1}{٩}$ جتا^٢ (س + ٥) + ث]
- [- $\frac{1}{٩}$ ظا^١ (س - ١) + ث]
- [- $\frac{1}{٤}$ ظتا^٤ (س + ٣) + ث]
- [$\frac{1}{٣}$ قا^٣ (س + ١) + ث]
- [$\frac{1}{٥}$ قتا^٢ (س - ٥) + ث]

- [٢٢] [جنا^٢ (س - ٢) . س]
- [٢٣] [ظا^٢ (س - ٤) . س]
- [٢٤] [ظاس قا^٢ س . س]
- [٢٥] [جاس^٢ س . س]
- [٢٦] [(ظاس - ٣) قا^٢ س . س]
- [٢٧] [جاس + ٣ جنا^٢ س . س]
- [٢٨] [جاس + ١ جنا^٢ س . س]
- [٢٩] [جاس - ٢ (س + جنا^٢) . س]
- [٣٠] [ظنا^٢ س قنا^٢ س . س]
- [٣١] [قا^٢ س . س]
- [٣٢] [س^٢ قنا^٢ (س - ٣) . س]
- [٣٣] [س^٢ قنا^٢ س^٢ ظنا^٢ س^٢ . س]
- [١ - س^٢ - ٤ (س - ٢) + ث]
- [١ - س^٢ ظا (س - ٤) - س + ث]
- [١ - س^٢ ظا س + ث]
- [١ - س^٢ ظا س + ث]
- [١ - (ظاس - ٣) + ث]
- [٢ (جاس + ٣) + ث]
- [٢ (جاس + ١) + ث]
- [١ - س^٢ (س + جنا^٢) + ث]
- [١ - س^٢ ظنا^٢ س + ث]
- [١ - س^٢ ظا س + ث]
- [ظنا (س - ٣) + ث]
- [١ - س^٢ قنا^٢ س + ث]

المجموعة الرابعة :

مسائل على التكامل المحدود

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :

- [١٠] [١] [س^٢ (٣ - ٤ س + ٥) . س]
- [٢] [س^٢ (١ + ٣ س - ٢ س^٢) . س]

[112]	$\sqrt[4]{\frac{112}{9}}$	[19]	$\sqrt[4]{\frac{112}{9}}$
[2]	$\frac{\sqrt[3]{\frac{112}{9}}}{\sqrt[3]{9}}$	[20]	$\sqrt[3]{\frac{112}{9}}$
$[\frac{64}{35}]$	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$	[21]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$
[صفر]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$	[22]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$
[صفر]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$	[23]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$
[364-]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$	[24]	$\sqrt[3]{\frac{64}{35}}$
$[\frac{61}{6}]$	$\sqrt[3]{\frac{61}{6}}$	[25]	$\sqrt[3]{\frac{61}{6}}$
$[\frac{32}{5}]$	$\sqrt[3]{\frac{32}{5}}$	[26]	$\sqrt[3]{\frac{32}{5}}$
[36]	$\sqrt[3]{\frac{32}{5}}$	[27]	$\sqrt[3]{\frac{32}{5}}$
[1]	$\sqrt[3]{\frac{32}{5}}$	[28]	$\sqrt[3]{\frac{32}{5}}$
$[\frac{5}{144}]$	$\sqrt[3]{\frac{5}{144}}$	[29]	$\sqrt[3]{\frac{5}{144}}$
$[\frac{5}{8}-]$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$	[30]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$
[63]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$	[31]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$
[114]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$	[32]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$
[9]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$	[33]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$
[98]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$	[34]	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

$$[3] \quad [35] \quad \frac{3 \text{ س. و. س}}{1 + \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[1-] \quad [36] \quad \frac{3 \text{ س. و. س}}{2 \text{ س} - 20 \sqrt{2}} \quad \text{ج.}$$

$$[9] \quad [37] \quad \frac{4 \text{ س. و. س}}{1 + \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[38] \quad [38] \quad \frac{2 \text{ س} + 3 \text{ س} + \sqrt{2} \text{ س} + 5 \text{ و. س}}{1} \quad \text{ج.}$$

$$[1] \quad [39] \quad \frac{(1 + 3 \text{ س}) \text{ و. س}}{4 + 2 \text{ س} + 3 \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[(3 - 13 \sqrt{2}) \frac{2}{3}] \quad [40] \quad \frac{(1 + 2 \text{ س}) \text{ و. س}}{9 + 3 \text{ س} + 3 \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[\frac{37}{12}] \quad [41] \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\left(\frac{1}{5 \text{ س}} + \frac{2}{4 \text{ س}} \right) \text{ و. س}}{1} \quad \text{ج.}$$

$$[(3 \sqrt{2} - 4) \frac{8}{3}] \quad [42] \quad \frac{9 \text{ و. س}}{\sqrt{2} \text{ س} + 1} \quad \text{ج.}$$

$$[4] \quad [43] \quad \frac{9 \text{ و. س}}{(\sqrt{2} \text{ س} + 1) \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[\frac{7-}{81}] \quad [44] \quad \frac{1 + 2 \text{ س}}{5 (3 + 2 \text{ س})} \quad \text{ج.}$$

$$[\frac{14}{3}] \quad [45] \quad \frac{5 \text{ و. س}}{4 + \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[59 - 39] \quad [46] \quad \frac{3 \text{ س} + 9 \text{ و. س}}{5 + \sqrt{2} \text{ س}} \quad \text{ج.}$$

$$[47] \quad \frac{2 + 3 \text{ س}}{\sqrt{2} \text{ س}} = \frac{5 \text{ و. س}}{5 \text{ و. س}} \quad \text{ص} = 6 \text{ عندما س} = 1 \text{ أوجد} \quad \text{ج.}$$

$$[\frac{32}{4}]$$

$$[٤٨] \blacksquare \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s \geq 1 \\ \text{عندما } s < 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كانت د (س)} \quad \left. \begin{array}{l} 5-2s \\ 3s^2 \end{array} \right\}$$

$$[٣٦] \quad \text{أوجد } \int_{-1}^3 \text{د (س) د س}$$

$$[٨ \frac{1}{2}] \quad [٤٩] \blacksquare \int_{-1}^4 |3-s-2s| \text{د س}$$

$$[٢٤] \quad [٥٠] \blacksquare \int_{-2}^2 (|س| + 3س + ٥) \text{د س}$$

$$[٥١] \blacksquare \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 \leq s \leq 3 \\ \text{عندما } s < 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كانت د (س)} \quad \left. \begin{array}{l} 5-12s \\ 2s^2-4s \end{array} \right\}$$

$$[٢٨ \frac{2}{3}] \quad \text{أوجد } \int_{-1}^0 \text{د (س) د س}$$

$$[١٨ \frac{2}{3}] \quad [٥٢] \blacksquare \int_{-1}^0 |س-٢| \text{د س}$$

$$[٥٣] \blacksquare \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s > 1 \\ \text{عندما } 1 \leq s < 2 \\ \text{عندما } s \leq 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كانت د (س)} \quad \left. \begin{array}{l} 4+3s \\ ٥ \\ 8-\frac{3}{2}s \end{array} \right\}$$

$$[١٤] \quad \text{أوجد } \int_{-1}^4 \text{د (س) د س}$$

$$[صفر] \quad [٥٤] \blacksquare \int_{-3}^0 (|س-٣| - |س+١|) \text{د س}$$

$$[٣] \quad [٥٥] \blacksquare \int_{-1}^2 \frac{س(1+3س)}{1+س-2س} \text{د س} \quad \text{أوجد قيمة } P$$

$$[٢ \frac{2}{3}] \quad [٥٦] \blacksquare \int_{-1}^2 \frac{س^2 \text{د س}}{1+2س} \text{د س} \quad \text{أوجد قيمة } P$$

$$[٢-] \quad [٥٧] \blacksquare \int_{-1}^2 |س| |س+١| \text{د س} \quad \text{أوجد قيمة } P$$

$$[٣ \frac{1}{2}] \quad [٥٨] \blacksquare \int_{-1}^2 |س(1+2س)| \text{د س} \quad \text{أوجد قيمة } P$$

■ [٥٩] إذا كان $1 = \frac{3s}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)}$ أوجد قيمة p . [٤]

■ [٦٠] أثبت أن $T(s) = (s^2 - 1)(s - 2)$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = (s^3 - 4s^2 + 8s + 3)$ في $[0, 3]$ ثم أوجد $\int_0^3 D(s) ds$ [١١]

■ [٦١] إثبت أن الدالة $T(s) = (s^3 - 3s^2 + 5s - 5)$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = \frac{3}{2}(s^2 - 6s + 1)$ في $[-1, 4]$ ثم أوجد $\int_{-1}^4 D(s) ds$ [٢١٦]

■ [٦٢] إثبت أن $T(s) = \frac{s^2 - 5}{s^3 - 4s}$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = [2, 5]$ ثم أوجد $\int_2^5 D(s) ds$ [١١]

■ [٦٣] إثبت أن $T(s) = \left(\frac{s}{s+1}\right)^2$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = \frac{s^2}{3(s+1)}$ في $[1, 3]$ ومن ثم أوجد $\int_1^3 D(s) ds$ [٥]

■ [٦٤] إثبت أن $T(s) = \sqrt{s^2 - 4s + 5}$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = \frac{s - 2}{\sqrt{s^2 - 4s + 5}}$ في $[1, 3]$ ومن ثم أوجد $\int_1^3 D(s) ds$ [صفر]

■ [٦٥] إثبت أن $T(s) = \sqrt[4]{(s+1)^3}$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = \frac{s^3}{\sqrt[4]{s+1}}$ في $[0, \sqrt[4]{5}]$ ثم أوجد $\int_0^{\sqrt[4]{5}} D(s) ds$ [٢٦]

■ [٦٦] إثبت أن $T(s) = \sqrt{1 + s^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة $D(s) = \frac{1 + s^3}{1 + s^3 \sqrt{s}}$ في $[0, 4]$ ثم أوجد $\int_0^4 D(s) ds$ [١٢]

■ [٦٧] إثبت أن $t(s) = (s + \sqrt{s^2 + 3})$ هي مشتقة عكسية للدالة

$d(s) = (s + 1) \sqrt{s^2 + 3}$ في $[1, 0]$ ثم أوجد $t(s)$ د (s) و s [٣]

■ [٦٨] إثبت أن كلا من $t_1(s) = \frac{1}{3} s^3 + 2s^2 + 4s$ ، $t_2(s) = \frac{1}{3} (s + 2)^3$

هي مشتقة عكسية للدالة $d(s) = (s + 2)^4$ في H ، وإذا كان

$t_1(s) = 63$ أوجد قيمة s . [٤]

■ [٦٩] بدأت نقطة مادية الحركة في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) وكان القياس الجبري لسرعتها

s متر/ث بعد t ثانية يتعين بالدالة $s = (t + 1)(t + 3)$ أوجد :

(أولاً) إزاحة النقطة المادية خلال الثواني الثانية والثالثة والرابعة .

(ثانياً) إزاحة النقطة المادية خلال الثانية الخامسة فقط . [١٨٠ ، ١٢٤ متر]

■ [٧٠] يتحرك جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) وكانت سرعته s بالسم/ث بعد t

ثانية تتعين من المعادلة : $s = \begin{cases} 1 + 2t & \text{عندما } t \geq 2 \\ 5 + 2t & \text{عندما } t < 2 \end{cases}$ أوجد بعد الجسيم عن (و) بعد

ثانيتين من بدء الحركة وكذلك بعد ٥ ثوان من بدء الحركة . [١٠ سم ، ٤٦ سم]

■ [٧١] تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) وكانت سرعتها بالمتر/ث بعد t

ثانية تتعين من العلاقة :

$s = \begin{cases} 13 + 2t & \text{عندما } t \geq 3 \\ 8 - 2t & \text{عندما } t < 3 \end{cases}$ أوجد إزاحة النقطة المادية خلال الثانية

الثالثة فقط وكذلك إزاحتها خلال الثواني الثالثة والرابعة والخامسة . [١٨ متر ، ١٠٠ متر]

■ [٧٢] يتحرك جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) فإذا كانت إزاحته s خلال زمن t ث

في الفترة $[0, 5]$ بالمتر يتعين من : $s = \left(\frac{2}{3}t + 2\right) + \left(\frac{2}{3}t - 6\right)$ و s

أوجد :

(أولاً) بعد الجسم عن (و) بعد ٢ ث من بدء الحركة .

(ثانياً) بعد الجسم عن (و) بعد ٥ ث من بدء الحركة .

(ثالثاً) سرعة الجسم خلال الفترة الزمنية $[2, 0]$. [٤ متر ، ١٥ متر ، $s = \frac{2}{3}t + 2$]

■ [٧٣] نقطة مادية تتحرك في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) وكانت سرعتها ϵ بالسـم/ث بعد λ

ث تتعين من العلاقة $\epsilon = 8 - |2 - \lambda|$.

أوجد إزاحة النقطة خلال الأربعة ثواني الأولى وخلال الثانية الثالثة فقط.

[٢٣,٥ ، ٧,٨ سم]

■ [٧٤] يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يتعين القياس الجبري لسرعته بالـمتر/ث بعد λ ثانية من تحركه من نقطة ثابتة من العلاقة :

$$\frac{1}{\lambda} \epsilon = (1 + s + s^2) \cdot s . \text{ أوجد إزاحة هذا الجسيم خلال الثواني}$$

[٩٠ متر ، $\frac{1}{2} ١٤٥$ متر]

الثانية والثالثة وكذلك الثانية الرابعة فقط .

المجموعة الخامسة :

➤ مسائل على المساحات

أولاً : مسائل على مساحة سطح مناطق بين منحني ومحور السينات
أوجد مساحة سطح كل من المناطق الآتية باستخدام التكامل :

■ [١] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات : $s = 2$ ، $s = 1$ ، $s = 0$ ،

محور السينات . [٢٠ سم^٢]

■ [٢] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات : $s = 2$ ، $s = 7 - v$ ، $s = 1 + v$ ، $v = 0$ ،

$s = 2$ ، ومحور السينات . [١٨ سم^٢]

■ [٣] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات : $s = 2$ ، $s = 4 - v$ ، $s = 2$ ،

$s = 1 + v$ ، ومحور السينات . [١٠,٥ سم^٢]

■ [٤] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحني $s = 3 + s^2$ ، المستقيمين : $s = 3$ ،

$s = 2 + v$ ، ومحور السينات [$26\frac{2}{3}$]

■ [٥] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحني $s = 2 - s^2$ ، المستقيمين : $s = 1 + v$ ،

$s = 2 - v$ ، $v = 0$. [٩ سم^٢]

- [٦] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٥ - س$ ، والمستقيمين :
 $س + ١ = ٠$ ، $س - ٢ = ٠$. [١٢ سم^٢]
- [٧] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣ - ٤$ ، والمستقيمين :
 $س + ٢ = ٠$ ، $س - ١ = ٠$. [١٥ $\frac{٣}{٤}$ سم^٢]
- [٨] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات :
 $س - ٢ = ٠$ ، $س + ٢ = ٠$ ، $ص = ٠$. [٣ سم^٢]
- [٩] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات :
 $س + ص - ٤ = ٠$ ، $ص = ٠$ ، $س + ٢ = ٠$. [١٨ سم^٢]
- [١٠] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات :
 $س + ٢ = ٠$ ، $ص + ٣ = ٠$ ، $س - ١ = ٠$. [٤ سم^٢]
- [١١] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٩ - س^٢$ والمحور $ص = ٠$. [٣٦ سم^٢]
- [١٢] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢ - ٤$ ومحور السينات $ص = ٠$. [١٠ $\frac{٢}{٣}$ سم^٢]
- [١٣] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٨ - س^٣$ ، المحاور : $س = ٠$ ، $ص = ٠$. [٦,٧٥ سم^٢]
- [١٤] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣ + ١$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٢$. [٦,٧٥ سم^٢]
- [١٥] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣ - ٢٧$ ، المستقيمات :
 $ص = ٠$ ، $س + ٢ = ٠$. [١١٨ $\frac{٣}{٤}$ سم^٢]
- [١٦] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = (س + ٢)^٣$ ، $ص = ٠$ ، $س = ١$. [٢٠ $\frac{١}{٤}$ سم^٢]
- [١٧] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٣ - س^٣$ ، $س = ١$ ، $س = ٤$ ، $ص = ٠$. [١٤ سم^٢]

■ [١٨] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{2} = \sqrt{3+s}$ ، المحاور $s = 0$ ، $v = 0$.

[٤ ٣ سم^٢]

■ [١٩] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{6} = \sqrt{3-2s}$ ، المستقيمات :

[٥٤ سم^٢]

$v = 0$ ، $s = 3$ ، $v = 0$

■ [٢٠] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{2} = \sqrt{3+s} + 5$ ، المستقيمات :

[$\frac{2}{3}$ ٢٦ سم^٢]

$s = 3$ ، $s = 1$ ، $v = 0$ ، $v = 0$

■ [٢١] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{2} = \sqrt{4-s}$ ، والمحور $v = 0$.

[$\frac{32}{3}$ سم^٢]

■ [٢٢] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{2} = \sqrt{8+2s} - s$ ، المحور $v = 0$.

[٣٦ سم^٢]

■ [٢٣] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{2} = \sqrt{4+s} - 5$ ، المحور $v = 0$.

[٣٦ سم^٢]

■ [٢٤] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات :

[٥ سم^٢]

$s = 6$ ، $s = 4$ ، $s = 1$ ، $s = 0$

■ [٢٥] المنطقة المستوية المحدودة بفرعي الدالة $\sqrt{2} = |s - 5|$ ، المستقيمات :

[٨,٥ سم^٢]

$s = 0$ ، $v = 0$ ، $s = 4$

■ [٢٦] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{2} = \sqrt{1+s} + 2$ ، $v = 0$ ، $s = 2$.

[$\frac{35}{3}$ سم^٢]

$s = 3$ ، $v = 0$

■ [٢٧] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{3} = s$ ، المستقيمات :

[٦٨ سم^٢]

$s = 2$ ، $s = 4$ ، $v = 0$ ، $v = 0$

■ [٢٨] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $\sqrt{3} = (s - 2)$ ، $s = 0$ ، $v = 0$ ، $s = 4$.

[٨ سم^٢]

- [٢٩] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢ + س - ٦$ ، والمستقيمات :
 $ص = ٠$ ، $س = ٠$ ، $س = ٤$ [٢٠ سم^٢]
- [٣٠] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣ - س^٢$ ، والمستقيمات :
 $ص = ٠$ ، $س = ٢ + ٠$ ، $س = ٠$ [١٣ $\frac{١}{٦}$ سم^٢]
- [٣١] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢ - س - ٣$ ، والمستقيمات :
 $ص = ٠$ ، $س = ٣ + ٠$ ، $س = ٢ - ٠$ [١٩ $\frac{٢}{٣}$ سم^٢]
- [٣٢] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣ + س - س^٢$ ، والمستقيمات :
 $ص = ٠$ ، $س = ٣ + ٠$ ، $س = ٥ - ٠$ [٣٦ $\frac{١}{٣}$ سم^٢]
- [٣٣] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢ - س - ٢$ ، والمستقيمات :
 $ص = ٠$ ، $س = ٤ - ٠$ ، $س = ٣ + ٠$ [٢١ $\frac{٥}{٦}$ سم^٢]
- [٣٤] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣ - س^٢ - ٦س$ ، محور السينات .
[٢١ $\frac{١}{١٢}$ سم^٢]
- [٣٥] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٤ - س^٣ - س^٢$ ، المستقيم $ص = ٠$.
[٣٢ $\frac{٣}{٤}$ سم^٢]
- [٣٦] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = (س + ٢)(س - ١)(س - ٣)$ ، $ص = ٠$.
[٢١ $\frac{١}{١٢}$ سم^٢]
- [٣٧] سطح المثلث المحدود بالمستقيمات : $س - ص = ١$ ، $س + ص = ٥$ ، $ص = ٠$.
[٩ سم^٢]
- [٣٨] سطح المثلث المحدود بالمستقيمات : $س^٢ - ص = ٨$ ، $س^٢ - س - ٣ = ص$ ، $ص = ٠$.
[٨ سم^٢]

■ [٣٩] سطح المثلث الذي طول قاعدته = ٧ سم ، وارتفاعه القطعة المستقيمة و ج

[١٤ سم^٢]

حيث و = (٠، ٠) ، ج = (٤، ٠)

■ [٤٠] سطح المثلث P ب ج الذي رؤوسه : P (٠، ٣) ، ب (٠، ٤) ، ج (٣، ١)

[١٠,٥ سم^٢]

■ [٤١] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س٤ - س٣ + س٢$ ، ومحور السينات .

[٥,٨ سم^٢]

ثانياً : مسائل على مساحة منطقة واقعة بين منحنين أو أكثر

■ [١] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{١}{٢} س٢$ ، والمستقيم $ص = س٢$

[$\frac{١}{٣} ٥ سم٢$]

■ [٢] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٣ - س٢$ ، والمستقيم $ص = س٢$

[$\frac{٢}{٣} ١٠ سم٢$]

■ [٣] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س٢ - ٤$ ، والمستقيم $ص = س٣ + ٠$

[$\frac{٥}{٦} ٢٠ سم٢$]

■ [٤] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س٣ - س٢$ ، والمستقيم $ص = ٤ + ٠$

[$\frac{١٢٥}{٦} سم٢$]

■ [٥] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س٢ + س٤$ ، والمستقيم $ص = س٢ + ٣$

[$\frac{٢}{٣} ١٠ سم٢$]

■ [٦] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س٢ + ١$ ، والمستقيم $ص = س٢ + ١$

[$\frac{١}{٣} ١ سم٢$]

■ [٧] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س٢ - ١٢$ ، والمستقيم $ص = ١٢ - س٢$

[$\frac{٤٤}{٣} سم٢$]

، والمستقيم $ص = ٠$

[٨] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٨ + ٢س - س^٢$ ، والمستقيم $ص = س + ٢$
 [٥٠ سم^٢]

[٩] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٢س^٢ + س - ٦$ ، والمستقيم $ص = ٦$
 [٤١ سم^٢]

[١٠] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢ - ٣$ ، $ص = ٥ - س$
 [٢١ سم^٢]

[١١] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = ٢ - س^٢$ ، وفرعى الدالة $ص = |س|$
 [٢ سم^٢]

[١٢] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات :
 $ص + ٦ = ٠$ ، $٢س - ٣ص = ٠$ ، $٥ = ص$
 [٥ سم^٢]

[١٣] المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات :
 $ص + ٢ = ٨$ ، $٥س - ٢ص = ١٦$ ، $٠ = ص + ٢ + ٣س$
 [٢٤ سم^٢]

[١٤] المنطقة المستوية المحدودة بفرعى الدالة $ص = |س - ٢|$ والمستقيم
 $٢س + ٣ص = ٩$
 [٥ سم^٢]

[١٥] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين : $ص = س^٣$ ، $ص = ٤س$
 [٨ سم^٢]

[١٦] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين : $ص = س^٣$ ، $ص = ٢س + س^٢$
 [٣ سم^٢]

[١٧] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين : $ص = ٣ - س^٣$ ، $ص = ٣ - ٢س - س^٢$
 [٣ سم^٢]

[١٨] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س + س^٣ = ٣$ ، والمستقيم
 $ص = ٣$
 [٣ سم^٢]

[١٩] المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢$ ، والمماسين له من النقطة $(٠ ، ٤)$
 [٥ سم^٢]

➤ مسائل على حجوم الأجسام الدورانية

■ [١] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات $ص = ٣$ ، $ص = ٠$ ،

$س = ٠$ ، $س = ٥$ حول محور السينات . $[٤٥ \pi \text{ سم}^3]$

■ [٢] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات :

$ص = \frac{٣}{٢}$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٤$ حول محور السينات $[٤٨ \pi \text{ سم}^3]$

■ [٣] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات :

$س - ٣$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٠$ ، $ص = ١$ ، $ص = ٣$ حول محور الصادات

$[٢٦ \pi \text{ سم}^3]$

■ [٤] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات :

$٢ س + ص = ٣$ ، $س = ٠$ ، $ص = ٠$ دورة كاملة حول :

(أولاً) محور السينات (ثانياً) محور الصادات $[\pi \frac{٩}{٤}, \pi \frac{٩}{٢}]$

■ [٥] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات : $ص + ٣ = ٢$ ،

$س = ٢$ ، $س - ٢ = ٠$ ، $ص = ٠$ حول محور السينات . $[١٢٤ \pi \text{ سم}^3]$

■ [٦] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{١}{٢} س$ ، $ص = ٠$ ،

$س = ٢$ حول محور السينات . $[١,٦ \pi \text{ سم}^3]$

■ [٧] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٣ س$ ، $س = ٠$ ،

$ص = ٣$ حول محور الصادات $[٢٧ \pi \text{ سم}^3]$

■ [١١] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{١}{١+س}$ ،

والمستقيمات : $س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $ص = ٠$ حول محور السينات $[٢ \pi \text{ سم}^3]$

- [١٢] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $\sqrt{9-s^2}$ ، والمستقيمات : $s = 0$ ، $s = 1$ حول محور السينات .
[$\pi \frac{28}{3}$ سم^٣]
- [١٣] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $\sqrt{25-s^2}$ ، والمستقيمات : $s = 0$ ، $s = 0$ ، $s = 3$ حول محور الصادات .
[$\pi 66$ سم^٣]
- [١٤] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى : $s - s = 1$ ، $s + 4 = 0$ ، $s - 2 = 0$ حول محور الصادات .
[$\pi 18$ سم^٣]
- [١٥] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى \sqrt{s} ، والمستقيمات : $s = 1$ ، $s = 8$ حول محور السينات .
[$\pi 19,8$ سم^٣]
- [١٧] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $s^2 - s^3 = 0$ ، $s = 0$ حول محور السينات .
[$\pi \frac{81}{80}$ سم^٣]
- [١٨] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $(s - 2)^2$ ، والمستقيمات : $s = 0$ ، $s = 0$ ، $s = 4$ حول محور السينات .
[$\pi \frac{64}{5}$ سم^٣]
- [١٩] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $s^2 - s - 2 = 0$ ، $s = 0$ حول محور السينات .
[$\pi 8,1$ سم^٣]
- [٢٠] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $s^3 - s^2 = 0$ ، المحور $s = 0$ حول محور السينات .
[$\pi \frac{128}{105}$ سم^٣]
- [٢١] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالدائرة $s^2 + s^2 = 16$ ، $s = 0$ حول محور السينات .
[$\pi \frac{256}{3}$ سم^٣]
- [٢٢] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $\frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{9} = 1$ ، $s = 0$ حول محور السينات .
[$\pi 24$ سم^٣]

■ [٢٣] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٣ - س^٢$

، والمستقيم $ص = ٢$ حول محور السينات .
[٢,٤ π سم^٣]

■ [٢٤] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٤ س - س^٢$ ،

$ص = ٣$ حول محور السينات .
[١,٥ π سم^٣]

■ [٢٥] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٣ (٣ - س)$ ،

والمستقيم $ص = ٣$ حول محور السينات .
[٢,٢ π سم^٣]

■ [٢٦] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢$ ، والمستقيم

$ص = ٣$ حول محور السينات .
[٢,٤ π سم^٣]

■ [٢٧] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٥$ ، والمستقيم

$ص + ٦$ حول محور السينات .
[١,٣ π سم^٣]

■ [٢٨] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٣ س - س^٢$ ،

والمستقيم $ص = ١$ حول محور السينات .
[١,٥ π سم^٣]

■ [٢٩] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \sqrt{٤ - س^٢}$ ،

والمستقيم $ص + ٢$ حول محور السينات .
[٨ π سم^٣]

■ [٣٠] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \sqrt{٩ - س^٢}$ ،

والمستقيم $ص - \sqrt{٢} = ٣ + ٠$ حول محور السينات .
[١٦ π سم^٣]

■ [٣١] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين : $ص = ٣$ و $ص = س^٢$

، $ص = ٤ - س^٢$ حول : (أولاً) محور السينات (ثانياً) محور الصادات .

[١٩,٢ π سم^٣]

■ [٣٢] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{١}{٢} س^٣$ ، والمستقيم

$ص = ٢$ حول محور السينات .
[٢١ π سم^٣]

■ [٣٣] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٢ - ٢س$ ، والمستقيم

$$ص = ١٢ - ٢س \text{ حول محور السينات . } \left[\frac{١٢٨}{٣} \pi سم^3 \right]$$

■ [٣٤] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات : $ص = س^3$

$$، ص = ٤س ، ص = س \text{ حول محور السينات حيث } ٠ < س . \left[\frac{٤}{٢١} \pi سم^3 \right]$$

■ [٣٥] أحسب بالتكامل حجم المخروط الدائري القائم الذى ارتفاعه ٤ سم ، وطول نصف قطر

$$\text{قاعدته } ١,٥ سم . \left[٣ \pi سم^3 \right]$$

■ [٣٦] أحسب بالتكامل حجم المخروط الدائري الناقص المتوازي القاعدتين إذا كان طولاً نصفى قطر

$$\text{قاعدتيه } ٢ سم ، ٦ سم ، وارتفاعه ٣ سم . \left[٥٢ \pi سم^3 \right]$$

■ [٣٧] أحسب بالتكامل حجم القطعة الكروية التى ارتفاعها ٢ سم ، وطول نصف قطر كرتها

٤ سم . استنتج حجم القطاع الكروى المشترك معها فى الارتفاع .

$$\left[\frac{٦٤}{٣} \pi سم^3 ، \frac{٤٠}{٣} \pi سم^3 \right]$$

■ [٣٨] P ب ج مثلث رؤوسه النقط : $P(٠, ٥)$ ، $B(٣, ٢)$ ، $G(-٣, ٠)$. أوجد باستخدام

التكامل حجم الجسم الناتج من دوران سطح المثلث PBG حول محور السينات .

$$\left[٢٤ \pi سم^3 \right]$$

■ [٣٩] إذا كانت $P(٠, ٠)$ ، $B(٠, ٦)$ ، $G(٢, ٣)$ ، $S(٢, ٠)$. أوجد حجم

الجسم الناتج من دوران سطح شبه المنحرف PBG ج و

(أولاً) حول محور السينات (ثانياً) حول محور الصادات .

$$\left[١٦ \pi سم^3 ، ٤٢ \pi سم^3 \right]$$

[١] (مصر ١٩٩٣) :

(أ) أوجد $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ حيث $x = 1$ و $x = 2$

[١١]

$\left[\frac{27}{140} \right]$

(ب) استخدم تعويضاً مناسباً لإيجاد قيمة $\int_1^2 \sqrt{x-1} dx$ حيث $x = 1$ و $x = 2$

[٢] (مصر ١٩٩٣) :

(أ) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيات : $y = x^2$ و $y = x$ ، $x = 0$ ، $x = 1$ حول المستقيم $x = 1$ دورة كاملة .

$\left[\frac{1}{2} \pi \text{ وحدة مكعبة} \right]$

(ب) إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 6$ ، $\int_2^3 f(x) dx = 13$ فأوجد قيمة $\int_1^3 f(x) dx$

[١٤ -]

[٣] (السودان ١٩٩٣) :

(أ) إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 6$ ، $\int_2^3 f(x) dx = 13$ ، $\int_3^4 f(x) dx = 20$ فأوجد $\int_1^4 f(x) dx$

(ب) أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين المستقيم $y = x$ والمنحنى $y = \frac{1}{x^2}$ ، $x = 1$ ، $x = 2$.

[٤] (السودان ١٩٩٣) :

(أ) أوجد $\int_1^2 \sqrt{x+3} dx$ حيث $x = 1$ و $x = 2$

(ب) إذا كان $\int_1^2 (x^2 + 1) dx = 10$ فأوجد قيمة $\int_1^2 x^2 dx$.

[٥] (مصر ١٩٩٤) :

(أ) أوجد $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx$ حيث $x = 1$ و $x = 2$

(ب) إذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 1$ حول محور السينات دورة كاملة يساوى $\frac{8\pi}{3}$ وحدة مكعبة . فأحسب

قيمة $\int_1^2 x^2 dx$

[٦] (مصر ١٩٩٤) :

(١) أوجد $\int_1^{\sqrt{s^3+s^2}} s \, ds$

(٢) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيات $s = 3$ ، $s = \frac{1}{3}$ ، $s = 2$ ، $s = 0$.

[٧] (مايو ١٩٩٩) :

(١) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين $s = 6$ ، $s = 2 + s - 3 = 0$.

(٢) أوجد $\int_1^{\left(1 + \frac{1}{s}\right)^3 - \left(\frac{1}{s}\right)^3} s \, ds$

[٨] (مايو ١٩٩٩) :

(١) إذا كان : د (س) $\left\{ \begin{array}{l} s \geq 2, \frac{s+8}{s^2+s+10} \\ s < 2, 0 \end{array} \right.$ فأوجد \int_{-3}^3 د (س) . س

(٢) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $s = 8$ ، والمستقيمان $s = 0$ ، $s = 2$ دورة كاملة حول محور الصادات .

[٩] (أغسطس ١٩٩٩) :

(١) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $s = (4 - s)$ ، والمستقيمين :

$s = 3$ ، $s = 9$ ، $s = 3$

(٢) أوجد $\int_1^{\frac{s^3}{1+s^3}} s \, ds$

[١٠] (أغسطس ١٩٩٩) :

(١) إذا كان د (س) $\left\{ \begin{array}{l} s \geq 0, |3-s| \\ s < 0, \frac{1}{2} s - 7 \end{array} \right.$ فأوجد \int_{-7}^7 د (س) . س

(٢) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المستقيم $s = 1 + s$ ، والمستقيمين : $s = 0$ ، $s = 2$ دورة كاملة حول محور السينات .

■ [١١] (مايو ١٩٩٦) :

(٢) أوجد $\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1+u^3}} du$

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين :

$v = u^2$ ، $v = 2u$ حول محور السينات دورة كاملة .

■ [١٢] (مايو ١٩٩٦) :

(٢) أوجد $\int_0^1 \frac{u}{1+|u|^3} du$

(ب) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيات :

$v = \sqrt{u}$ ، $v = u + 6$ ، $v = 0$

■ [١٣] (أغسطس ١٩٩٦) :

(٢) احسب : $\int_0^1 \frac{u}{(1-\sqrt{u})^3} du$

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيات :

$v = u^3 + 1$ ، $v = 0$ ، $v = 0$ ، $v = 1$ دورة كاملة حول محور السينات .

■ [١٤] (أغسطس ١٩٩٦) :

(٢) احسب : $\int_0^1 \frac{u^3}{(9+u^2)^2} du$

(ب) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين : $v = u^2 + 2$ ، $v = 4 - u^2$

■ [١٥] (مايو ١٩٩٧) :

(٢) أوجد $\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{u}(1+\sqrt{u})^4} du$

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة من أعلى بالدائرة

$v = u^2 + 4$ ، ومن أسفل بالمستقيمين $v = u$ ، $v = -u$ دورة كاملة حول محور السينات .

[١٦] (مايو ١٩٩٧) :

(٢) أوجد $\left[\sqrt{s^3 + 3} \right]$ و s

(ب) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات : $s = \sqrt{s}$ ، $s + \sqrt{s} = 0$ ،
 $s - \sqrt{s} = 6$

مجموعة الكتاب المدرسي :

تمارين (١-٤) من الكتاب المدرسي

(١) $\left[s (s^2 + 3) \right]$ و s يساوي

(ب) $\frac{1}{12} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(أ) $\frac{1}{6} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(د) $\frac{1}{8} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(ج) $\frac{1}{4} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(٢) إذا كان $\left[(s^2 + 3) \right]$ لـ s و $s = \sqrt{s} - \left[\sqrt{s} \right]$ فإن s يساوي :

(ب) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(أ) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(د) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(ج) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(٣) إذا كان $\left[(s^2 + 1) \right]$ و $s = \sqrt{s} - \left[\sqrt{s} \right]$ فإن s يساوي :

(ب) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(أ) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(د) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

(ج) $\frac{1}{2} (s^2 + 3) + \sqrt{s}$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية :

(٥) $\int \sqrt{s^2 (s^2 - 2)} ds$

(٤) $\int \sqrt{s^2 (s^2 - 2)} ds$

(٧) $\int \sqrt{s^2 + 4} ds$

(٦) $\int \sqrt{s^2 (s^2 - 1)} ds$

(٩) $\int \sqrt{s^2 (s^2 - 3)} ds$

(٨) $\int \sqrt{s^2 (s^2 - 1)} ds$

$$(10) \left[\frac{s}{s^3 + 2} \right]$$

$$(11) \left[\frac{s}{s + 1} \right]$$

$$(12) \left[\frac{s + 1}{s \sqrt{1 - s}} \right]$$

$$(13) \left[\frac{s^2}{s \sqrt{1 - s^2}} \right]$$

$$(14) \left[s \text{ هـ}^2 s \right]$$

$$(15) \left[\frac{s \text{ هـ}^2 - 1}{s \text{ هـ}^2 + s} \right]$$

$$(16) \left[\frac{s}{s} \right]$$

$$(17) \left[\frac{s}{s} \right]$$

$$(18) \left[\frac{1}{s} \right]$$

باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الآتية :

$$(19) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(20) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(21) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(22) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(23) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(24) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(25) \left[\frac{s}{s^3} \right]$$

$$(26) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

$$(27) \left[\frac{s}{s^2} \right]$$

أجب عن ما يأتي :

(28) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $P(2, 3)$ ، وميل العمودي عليه عند أي نقطة (s, v) هو $3 - s$.

(29) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (s, v) واقعة عليه هو $s + 1$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $(0, \frac{11}{15})$.

(30) أوجد معادلة المنحنى $v = d(s)$ إذا كان $p = \frac{s^2}{s^2}$ ، $s + b$ حيث p ، b ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة $(2, 0)$ وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(0, 1)$ ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.

تمارين (٢-٤) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت $\frac{ص}{س} = قتا^٢$ ، ص = ٢ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص تساوي

(أ) ٢- ظتا س

(ب) ٢- ظتا س

(ج) ٣- ظتا س

(د) ٣- ظتا س

(أ) س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث

(ب) س + ٢ جا ٢ س + ث

(ج) س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث

(د) س - ٢ جا ٢ س + ث

(٢) $\left[\begin{array}{l} ٢ جتا^٢ س يساوي \\ (أ) س + \frac{١}{٢} جا ٢ س + ث \\ (ب) س + \frac{١}{٤} قتا^٢ س + ث \\ (ج) س - \frac{١}{٢} جا ٢ س + ث \\ (د) س - \frac{١}{٣} ظا^٢ س + ث \end{array} \right]$

(أ) $\frac{١}{٥} قتا^٢ س + ث$

(ب) $\frac{١}{٤} قتا^٢ س + ث$

(ج) $\frac{١}{٣} ظا^٢ س + ث$

(د) $\frac{١}{٣} ظا^٢ س + ث$

(٣) $\left[\begin{array}{l} قتا^٢ س ظا س س تساوي : \\ (أ) (٢ + ٣س) جا س س تساوي \\ (ب) (٢ + ٣س) جتا س + ٣ جا س + ث \\ (ج) (١ + ٣س) جتا س + ٢ جا س + ث \\ (د) (١ + ٣س) جتا س - ٢ جا س + ث \end{array} \right]$

(أ) $(٢ + ٣س) جتا س + ٣ جا س + ث$

(ب) $(٢ + ٣س) جتا س + ٣ جا س + ث$

(ج) $(١ + ٣س) جتا س + ٢ جا س + ث$

(د) $(١ + ٣س) جتا س - ٢ جا س + ث$

أوجد التكاملات الآتية :

(١) $\int (٣ + ٢س) س س$

(٢) $\int (٣ + ٢س) س س$

(٣) $\int (٣ + ٢س) س س$

(٤) $\int (٣ + ٢س) س س$

(٥) $\int (٣ + ٢س) س س$

(٦) $\int \frac{جتا^٢ س - س}{جتا^٢ س} س$

(٧) $\int (جتا س + قتا س) س س$

(٨) $\int (٣ + ٢س) س س$

(٩) $\int (٣ + ٢س) س س$

(١٠) $\int (٣ + ٢س) س س$

(١١) $\int (٣ + ٢س) س س$

(١٢) $\int (٣ + ٢س) س س$

(١٣) $\int (٣ + ٢س) س س$

(١٤) $\int (جتا س + قتا س) س س$

(١٥) $\int (جتا س + قتا س) س س$

أجب عن ما يأتي :

(٢٠) إذا كان $\frac{ص}{س} = ٧ - ٢$ جا س أوجد ص بدلالة س إذا كان ص = ٥ عند س = ٠ .

(٢١) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٢}, ٩ + \frac{\pi}{٤})$ إذا كان ميل المماس له عند أي نقطة (س) ، ص (عليه يعطى بالعلاقة التالية : م = $\frac{١}{٢} + ٢س$)

(٢٢) منحنى ميل المماس عند أي نقطة يساوي - ٢ قتا س حيث ٢ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{٤}, ٥)$ ، $(\frac{\pi^3}{٤}, ١)$ أوجد معادلة المنحنى.

تمارين (٣-٤) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان $\int_{٢}^٣ د (س) س = ١٢$ ، $\int_{٢}^٥ د (س) س = ١٦$ فإن $\int_{٣}^٥ د (س) س$ يساوي :

(أ) ٢٨ (ب) ٤- (ج) ٤ (د) ٢٨

(٢) إذا كانت د (س) = |س| ، فإن $\int_{٢}^٥ د (س) س$ يساوي :

(أ) ١- (ب) صفر (ج) ٢ (د) ٤

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(٣) $\int_{١}^٣ س^٢ س$ (٤) $\int_{١}^٣ (٢ - ٢س) س$

(٥) $\int_{١}^٤ (١ + س) س^{\frac{٣}{٢}}$

(٦) $\int_{٨}^٩ \frac{ص}{ص-٨}$

(٧) $\int_{١}^٢ س (٣ - ٢س) س$

(٨) $\int_{١}^٢ س^٢ \sqrt{١ + س}$

(٩) $\int_{١}^٣ |س - ١| س$

(١٠) $\int_{٤}^٥ س (٤ + س) س^٢$

(١١) $\int_{١}^٣ س^٢ \sqrt{١ + س} س$

(١٢) $\int_{٢}^١ ٢ جا \pi ع س$

(١٣) $\int_{٤}^{\frac{\pi}{٤}} ظا ع س$

(١٤) $\int_{٣}^٢ (٧ - س) س$

أجب عن ما يأتي :

(١٥) إذا كان $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 10$ ، $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = 20$ احسب قيمة

(أ) $\int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] dx$

(ب) $\int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right] dx$

(ج) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

(١٦) إذا كان د دالة متصلة على الفترة $[-4, 4]$ ، $\int_{-4}^4 f(x) dx = 3$ ، احسب قيمة

(أ) $\int_{-4}^4 [2 + f(x)] dx$

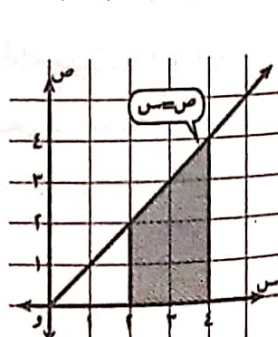
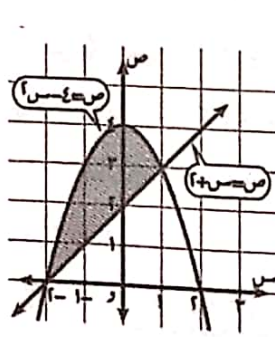
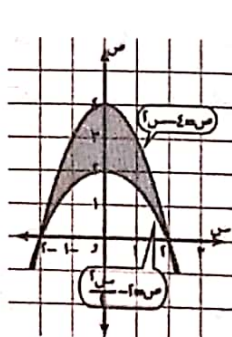
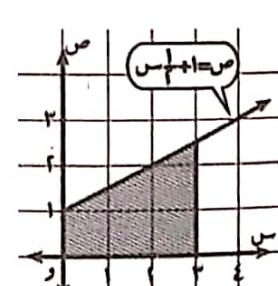
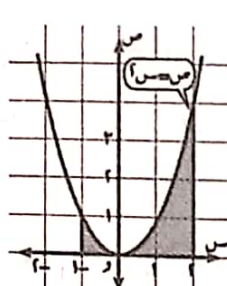
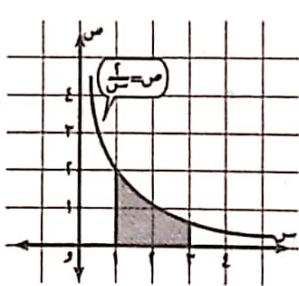
(ب) $\int_{-4}^4 f(x) dx$ فردية

(ج) $\int_{-4}^4 f(x) dx$ زوجية

(١٧) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} 2 & \text{عندما } س > 2 \\ س & \text{عندما } س \leq 2 \end{cases}$ أوجد $\int_0^6 f(x) dx$

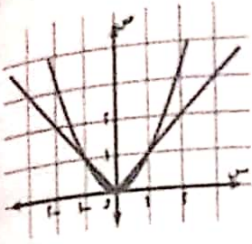
تمارين (٤-٤) من الكتاب المدرسي

اكتب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة الملونة في كل مما يأتي واحسب قيمته :



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

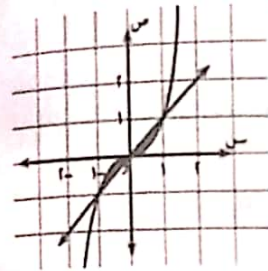
(٧) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $s = s^2$ ، $s = |s|$ تساوي :



(أ) $\int_{-1}^1 (s^2 - s) ds$ (ب) $\int_{-1}^1 (s - s^2) ds$

(ج) $\int_{-1}^1 (s - s^2) ds$ (د) $\int_{-1}^1 (s^2 - s) ds$

(٨) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $s = s^2$ والمستقيم $s = s$ ، تساوي :



(أ) $\int_{-1}^1 (s^2 - s) ds$ (ب) $\int_{-1}^1 (s - s^2) ds$

(ج) $\int_{-1}^1 (s - s^2) ds$ (د) $\int_{-1}^1 (s^2 - s) ds$

(٩) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمتين $s = s$ ، $s = 2$ ، $s = 0$ ؛ تساوي :

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

(١٠) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $s = s^2$ والمستقيمتين $s = 0$ ، $s = 2$ تساوي

(أ) ٨ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ١

في كل مما يأتي احسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين :

(١١) المنحنى $s = 5 - s^2$ ومحور السينات والمستقيمين $s = -2$ ، $s = 1$

(١٢) المستقيمتين : $s + 2 = 0$ ، $s = 9$ ، $s = 1$ ، $s = 3$ ، $s = 0$

(١٣) المنحنى $s = \sqrt{s + 4}$ والمستقيمتين $s = 0$ ، $s = 5$ ، $s = 0$

(١٤) المنحنى $s = 3 - 2s - s^2$ ومحور السينات

(١٥) المنحنى $s = \frac{4}{s}$ والمستقيمتين $s = 1$ ، $s = 4$ ، $s = 0$

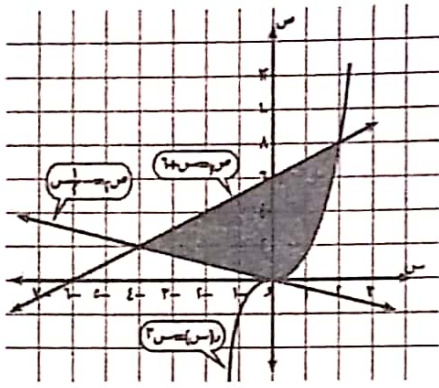
(١٦) منحنى الدالة $d : d = (s - 3)(s - 1)$ ومحوري الإحداثيات حيث $d \leq 0$

(١٧) منحنى الدالة $d : d = (s - 1)(s - 2)(s - 3)$ والمستقيمين $s = 4$ ، $s = 0$ حيث $d \leq 0$

(١٨) منحنى الدالتين d ، s حيث $d = 2s^2$ ، $s = 2 + s + 4$

(١٩) باستخدام التكامل المحدد أثبت أن مساحة المثلث الذي طول قاعدته يساوي ٩ وارتفاعه يساوي ٦

هي $\frac{1}{2} \times 6 \times 9$



(٢٠) تفكير إبداعي : في الشكل المقابل أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمين ص_١ ، ص_٢ حيث :

$$د (س) = س^2 ، ص_1 = س + 6 ، ص_2 = \frac{1}{2} س$$

تمارين (٤-٥) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = 2\sqrt{س}$ ، $ص = 0$ ، $س = 1$ دورة كاملة حول محور السينات يساوي.

- (أ) π (ب) \cdot (ج) π (د) 2π

(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{1}{2}س$ والمستقيمين $ص = 1$ ، $ص = 2$ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات يساوي

- (أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) π (د) 2π

(٣) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^2$ والمستقيم $ص = 1$ دورة كاملة حول محور الصادات يساوي.

- (أ) π (ب) $\frac{1}{2}\pi$ (ج) $\frac{1}{4}\pi$ (د) 2π

$$(٤) \int_{-2}^2 \pi (٤ - س^2) دس ، هو حجم$$

(ب) مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات

(أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات

(د) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

(ج) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات في كل مما يلي . :

$$(٦) ص = 3 - س ، س = 0 ، ص = 0$$

$$(٥) ص = س ، س = 3 ، ص = 0$$

$$(٨) ص = |س| ، س = -2 ، س = 4 ، ص = 0$$

$$(٧) ص = \frac{1}{س} ، س = 1 ، س = 4 ، ص = 0$$

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات في كل مما يأتي :

$$(١٠) \text{ ص} = \text{س}^2, \text{ س} = ٠, \text{ ص} = ٠, \text{ ص} = ٨$$

$$(١٢) \text{ ص} = \text{س}^2, \text{ س} = ٠, \text{ ص} = ٠, \text{ ص} = ٨$$

$$(٩) \text{ ص} = \text{س}, \text{ ص} = ١, \text{ س} = ٠$$

$$(١١) \text{ ص} = ٤ - \text{س}^2, \text{ س} = ٠, \text{ ص} = ٠$$

$$(١٣) \text{ ص} = ٢ + \text{س}, \text{ س} = ٠, \text{ ص} = ٣$$

أجب عن كل مما يأتي :

(١٤) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{ص} = ٤ - \text{س}$ والمستقيم $\text{س} = ٠$ عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة.

أولاً : حول محور السينات.

ثانياً : حول محور الصادات.

(١٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}}$ والمستقيم $\text{س} + \text{ص} = ٥$ دورة كاملة حول محور السينات.

دورة كاملة حول محور السينات.

(١٦) تفكير إبداعي : إذا كانت النقط $P(٠, ٢)$ ، $B(١, ٥)$ ، $C(٤, ٠)$ رؤوس المثلث PBC فأوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المثلث PBC دورة كاملة حول محور السينات.

تمارين الكتاب المدرسي العامة على (الوحدة الرابعة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$(١) \text{ إذا كان د (س) = } [(٣ - \text{س}^2) - ٥] \text{ س وكان د (٢) = ٣ ، فإن د (٢-)} =$$

$$(د) ١٢$$

$$(ج) ٧$$

$$(ب) ٣-$$

$$(أ) ٦-$$

$$(٢) \text{ إذا كان } \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}} ، \text{ ص} = \frac{١}{٢} \text{ عند س} = ١ ، \text{ عندما س} = \text{هـ فإن ص تساوي} :$$

$$(د) ١ + \frac{\text{هـ}^2}{٢}$$

$$(ج) \frac{١ + \text{هـ}^2}{٤}$$

$$(ب) \frac{١ - \text{هـ}^2}{٢}$$

$$(أ) \text{هـ}^2 - \text{هـ}$$

$$(٣) [\text{ظ}^٢ \text{س} - \text{س}] \text{ يساوي}$$

$$(أ) \text{ظ} \text{س} - \text{س} + \text{ث} \quad (ب) \text{ظ} \text{س} + \text{س} + \text{ث} \quad (ج) \text{ق}^٤ \text{س} + \text{ث} \quad (د) \frac{١}{٣} \text{ظ}^٢ \text{س} + \text{ث}$$

$$(٤) \text{ إذا كان } [\text{د} (٢) - \text{س}] = ٤ ، \text{ فإن } [\text{د} (٣) - \text{س}] \text{ يساوي}$$

$$(د) ٨-$$

$$(ج) ١٢$$

$$(ب) ١١$$

$$(أ) ٩$$

$$(26) \left[\sqrt[2]{\sqrt[2]{s} - 4} \sqrt[2]{s} \right]$$

$$(25) \left[\sqrt[4]{\sqrt[2]{s} - 16} \sqrt[2]{s} \right]$$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية :

$$(28) \left[\frac{s}{\sqrt[3]{(s+1)\sqrt{s}}} \right]$$

$$(27) \left[s(s-5)^2 \sqrt{s} \right]$$

$$(30) \left[\sqrt[4]{s} \sqrt{s} \sqrt[3]{s} \right]$$

$$(29) \left[s \sqrt[4]{s} (2 + \sqrt{s}) \sqrt{s} \right]$$

$$(32) \left[s \frac{\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{s}}{\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{s}} \right]$$

$$(31) \left[s \sqrt[3]{s} \sqrt[3]{s} \sqrt[3]{s} \right]$$

باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الآتية :

$$(34) \left[s \sqrt[4]{s} \sqrt[4]{s} \sqrt[4]{s} \right]$$

$$(33) \left[s \sqrt[3]{s} \sqrt[3]{s} \sqrt[3]{s} \right]$$

$$(35) \left[\sqrt[2]{s} \sqrt[2]{s} \sqrt[2]{s} \sqrt[2]{s} \right]$$

أجب عن ما يلي :

$$(36) \text{ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين } v = 7 + 2s - s^2, v = (1 - s)^2$$

$$(37) \text{ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين } v = 9 - s^2, v = s^2 + 1 \text{ والمستقيمين } s = 0, s = 2$$

$$(38) \text{ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين } v = 9 - s^2, v = s^2 + 1 \text{ ومحور السينات والمستقيمين } s = 0, s = 3$$

$$(39) \text{ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى } v = \frac{1}{s-1} \text{ والمستقيمين } s = 2$$

$$s = 4 \text{ ومحور السينات دورة كاملة حول.}$$

$$(أ) \text{ محور السينات } (ب) \text{ محور الصادات}$$

$$(40) \text{ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى } v = \sqrt[3]{s} \text{ ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة } (2, 2) \text{ الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات.}$$

اختبار الكتاب المدرسي التراكمية على (الوحدة الرابعة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية :

(١) $\left[(٤ - \text{قتا س ظتا س}) \text{ و س يساوي} \right]$

(ب) $٤ \text{ س} + \text{قتا س} + \text{ث}$

(د) $٤ \text{ س} + \text{ظتا س} + \text{ث}$

(أ) $٤ \text{ س} - \text{قتا س} + \text{ث}$

(ج) $٤ \text{ س} - \text{ظتا س} + \text{ث}$

(٢) $\frac{\text{هـ}^٣}{٣ - \text{هـ}} \text{ و س يساوي}$

(ب) $-\frac{١}{٣} | \text{لر} | \text{هـ}^٣ - ٣ + \text{ث}$

(د) $\frac{١}{٣} | \text{لر} | \text{هـ}^٣ - (٣ - \text{ث}) + \text{ث}$

(أ) $-\frac{١}{٣} - (\text{هـ}^٣ - ٣) + \text{ث}$

(ج) $| \text{لر} | \text{هـ}^٣ - ٣ + \text{ث}$

(٣) $\left[(٢ - | \text{س} |) \text{ و س يساوي} : \right]$

(د) صفر

(ج) ١

(ب) ٢

(أ) ٤

(٤) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة

يساوي :

(د) $\pi ٤$

(ج) $\pi ٢$

(ب) ٤

(أ) ٢

(٥) إذا كان $\int_١^٣ \text{د} (\text{س}) \text{ و س} = ٥$ ، $\int_٣^١ \text{ر} (\text{س}) = ٧$ ، فإن $\int_١^٣ \text{د} (\text{س}) + \int_٣^١ \text{ر} (\text{س}) + \int_١^٣ \text{ع} (\text{س})$

يساوي :

(د) ١٩

(ج) ١٢

(ب) ٧ -

(أ) ١٢ -

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بين المنحنى $\frac{٢}{\text{س}}$ والمستقيمات $\text{س} = ١$ ، $\text{س} =$

ع ، $\text{ص} = ٠$ دورة كاملة حول محور السينات مقدرا بالوحدات المكعبة يساوي :

(د) $\pi ٣$

(ج) $\pi ٢$

(ب) $\frac{\pi}{٢}$

(أ) $\frac{٣}{\pi}$

أجب عن ما يأتي :

(٧) أوجد التكاملات الآتية :

(ب) $\int \text{س}^٢ \sqrt{٣ - \text{س}} \text{ و س}$

(أ) $\int \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س}^٢ + ٦}} \text{ و س}$

(٨) إذا كانت د (س) = $(1 + س) (1 + س^2 + س^4 + س^6 + س^8 + س^{10} + س^{12} + س^{14} + س^{16} + س^{18} + س^{20})$ فأوجد د (٣)

(٩) أوجد التكاملات الآتية :

(ب) $\int \sqrt{1 + جاس جتا س} د س$

(أ) $\int طاس قاس د س$

(١٠) أوجد التكاملات الآتية :

(أ) $\int س^2 لوس د س$

(ب) $\int س هـ س^{1-2} د س$

(١١) أوجد قيمة كل من ما يأتي :

(ب) $\int_{-2}^2 س^2 د س$

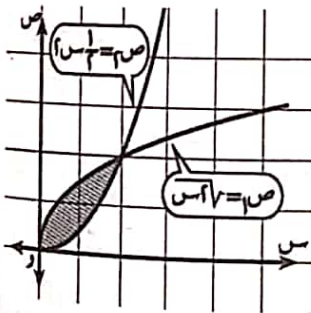
(أ) $\int_{-3}^3 (س^2 - ٣) د س$

(١٢) إذا كان $\int_0^2 د (س) د س = ٨$ ، $\int_0^2 س (س) د س = ٣$

احسب قيمة $\int_0^2 د (س) + س^2 د (س) د س$

(١٣) أوجد بالوحدات المربعة مساحة المنطقة المحددة بمنحنى د (س) = $(٢ - س)^2$ ومحور السينات في الفترة $[٢, ٤]$

(١٤) يوضح الشكل المقابل المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = \sqrt{٢س}$ ،



$ص = \frac{1}{٢} س^2$ أوجد :

(أ) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص_١$ ، $ص_٢$

(ب) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين

$ص_١$ ، $ص_٢$ دورة كاملة حول محور السينات.

إذا لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتي :

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
ارجع إلى الدرس	٢	١	٣	٤	٣	٥	١	مهارات	٢	١	٣	٣	٤	٥

الاختبار الأول

السؤال الأول :

- (أ) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين $ص = س^2$ ، $ص = |س|$.
 (ب) احسب الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س^2$ ، $ص = ع$ س دورة كاملة حول محور السينات :

السؤال الثاني :

(أ) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

$$(1) \quad ص = لو ه س^2 + (لو ه س)^2$$

$$(2) \quad ص = ه س لو ه^3 \quad (3) \quad ص = ه س^3 لو ه$$

(ب) احسب التكاملات الآتية :

$$(1) \quad \int_{-1}^1 \frac{3}{س + 2} . س . دس \quad (2) \quad \int \left(2 + \frac{3ظئاس}{جاس} \right) . س . دس$$

$$(3) \quad \int_{1}^2 لو ه (س^2 + 2) . س . دس$$

الاختبار الثاني

السؤال الأول :

- (أ) أوجد مساحة المنطقة المستوية الواقعة اسفل المنحنى $ص = \sqrt{س^3 + 4}$ وفوق محور

السينات بين المستقيمين $س = 0$ ، $س = 4$

- (ب) احسب الحجم الناتج من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى $ص = -س^2 + 8$ ، والمستقيمات $س = 2$ ، $س = 0$ ، $ص = 4$ دورة كاملة حول محور الصادات .

السؤال الثاني :

(أ) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

$$(1) \text{ ص} = 2^3 \text{ س} + 6 \text{ س}$$

$$(2) \text{ ص} = \text{جتا} (2 \text{ س})$$

$$(3) \text{ ص} = \text{لو ه} (2 \text{ ظا س})$$

(ب) احسب التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{\text{جتا س}}{2 + 3 \text{ جاس}} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ س}$$

$$(2) \int \frac{\pi}{4} (3 + 2 \text{ ظا س}) \cdot \text{س}$$

$$(3) \int \frac{2 + \text{لو ه س}}{\text{س}} \cdot \sqrt{2} \text{ س}$$

إجابات الوحدة الأولى:

الاشتقاق وتطبيقاته

تمارين الاشتقاق وتطبيقاتها

المجموعة الأولى :

مسائل على مشتقة الدوال المثلثية ومقلوباتها

أولاً : أكمل ما يـ . .

[١] ص / $\cos' x = -\sin x$ $\cos' x = -\sin x$

[٢] ص / $\sin' x = \cos x$ $\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$ $\sin' x = \cos x$

[٣] ص / $\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

ص / $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

[٤] ص / $\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

[٥] ص / $\cot' x = -\csc^2 x$ $\cot' x = -\csc^2 x$

[٦] ص / $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

[٧] ص / $\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

[٨] المقدار = $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

[٩] ص / $\sin' x = \cos x$ $\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$ $\cos' x = -\sin x$

$\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

[١٠] ص / $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

$\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

ثانياً : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١١] $\sin' x = \cos x$ $\sin' x = \cos x$

[١٢] $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

[١٣] $\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

[١٤] ص / $\cot' x = -\csc^2 x$ $\cot' x = -\csc^2 x$

[١٥] ص / $\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

[١٦] ص / $\sin' x = \cos x$ $\sin' x = \cos x$

[١٧] ص / $\cos' x = -\sin x$ $\cos' x = -\sin x$

ص / $\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

$\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

[١٨] ص / $\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

ص / $\cot' x = -\csc^2 x$ $\cot' x = -\csc^2 x$

[١٩] ص / $\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

ص / $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

[٢٠] ص / $\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

ثالثاً : أوجد $\frac{d}{dx}$:

[٢١] ص / $\sin' x = \cos x$ $\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$ $\cos' x = -\sin x$

[٢٢] ص / $\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

$\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

[٢٣] ص / $\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

[٢٤] ص / $\cot' x = -\csc^2 x$ $\cot' x = -\csc^2 x$

$\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

[٢٥] ص / $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

$\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

[٢٦] ص / $\cot' x = -\csc^2 x$ $\cot' x = -\csc^2 x$

$\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

[٢٧] ص / $\sec' x = \sec x \tan x$ $\sec' x = \sec x \tan x$

$\csc' x = -\csc x \cot x$ $\csc' x = -\csc x \cot x$

[٢٨] ص / $\cot' x = -\csc^2 x$ $\cot' x = -\csc^2 x$

$\tan' x = \sec^2 x$ $\tan' x = \sec^2 x$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

٢٩] جتا (س ص) × (ص + س ص) = ٢ + ٣ قتا ٢ س

ص جتا (س ص) + س ص / جتا (س ص) = ٢ + ٣ قتا ٢ س

س ص / جتا (س ص) = ٢ + ٣ قتا ٢ س - ص جتا (س ص)

٢ + ٣ قتا ٢ س - ص جتا (س ص) / س جتا (س ص) = ص /

٣٠] ص / ٣ = ٣ قتا ٣ س ظا ٣ س

٣١] ص = ظا ٥ س ٠ : ص / ٢ = ظا ٥ س × قتا ٥ س

١٠ = ٥ قتا ٥ س ظا ٥ س

٣٢] ص = جا ٣ س جا ٢ س

ص / ٣ = جتا ٣ س جا ٢ س + جا ٢ س جتا ٢ س

ص / جتا ٣ س جا ٢ س + جا ٢ س جتا ٣ س + جا ٣ س

جتا ٢ س

ص / جتا ٣ س جا ٢ س + جا ٢ س جتا ٣ س + جا ٣ س + جا ٢ س

ص / - جتا ٣ س جا ٢ س = جا ٢ س

المجموعة الثانية :

مسائل على مشتقة الدالة الضمنية

١١] ص + ٢ س ص ص /

١٢] س ١ / ص = س : ١ / س - ١ / ص + س ١ / ص = ١ /

ص / ١ - ص / ٢ = ص / ٢ - ص / ٢

١٣] ص ١ / س = س : ١ / ص - ١ / ص = ١ /

ص / ٢ = ص / ٢

١٤] ص = (١ - س ٤) / ٢

ص / (١ - س ٤) = ١ / ٢ - س ٨ - ١ / ٢

١٥] ص = (٢ + س) / ٢ : ١ / ص = ص /

١ / ٢ (٢ + س) = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١٦] ٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١٧] ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١٨] ٣ س ٢ ص + ٢ ص ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٣ س ٢ ص + ٢ ص ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٣ / ٢ = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١٩] ٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

ص / - ص / = ص /

١١١] س ١ - ص ١ + ٢ = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ (ص /) - ص / = ص /

١١٢] ٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١١٤] ٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١١٦] ٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

١١٧] ٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

٢ + س ٢ ص ص / = ص / : ص / ٢ = ص / ٢

$$\text{[36]} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \text{ص} , \quad 2 = \text{س} \quad \therefore$$

$$\frac{10}{8} - \frac{1}{8} + 16 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\text{[37]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \theta 2 \text{ ظ } \theta 2 \text{ ق } 2 \times \theta 2 \text{ ق } 2 = \text{ص}$$

$$\theta 2 \text{ ق } 2 \text{ ظ } \theta 2 \text{ ق } 2 = \text{ص} , \quad \theta 2 \text{ ظ } \theta 2 \text{ ق } 2 = \text{ص}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{130 \text{ ظ } 2} = \frac{1}{\theta 2 \text{ ظ } 2} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad \therefore$$

$$\text{[38]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \pi 2 \text{ جتا } \theta \pi 2 \text{ جتا } \theta \pi 2 = \text{ص} , \quad \pi 2 \text{ جتا } \theta \pi 2 = \text{ص}$$

$$\theta \quad \therefore \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \theta \pi 2 \text{ ظ } - = \theta \pi 2 \text{ ظ } - = 60 \quad \therefore$$

$$\text{[39]} \quad \text{ج} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \text{ص} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \text{ص}$$

$$\frac{\pi \sqrt{6} - \pi \sqrt{2}}{\pi \sqrt{2}} = \text{ص} \quad \therefore$$

$$\text{[40]} \quad \text{ميل المماس} = \frac{\frac{\pi}{2} \times 6 - \frac{\pi}{2} \times \pi \sqrt{6} - \frac{\pi}{2} \times \pi \sqrt{2}}{\frac{\pi}{2} \times \pi \sqrt{2}} = \text{ص} \quad \therefore$$

$$\text{[41]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad 10 - \text{ج} 6 = \text{ص} , \quad 4 - \text{ج} 4 = \text{ص} \quad \therefore$$

$$\frac{1 + \text{ج} 4}{4 - \text{ج} 6} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad \therefore$$

أولاً: المماس أفقى ([محور السينات)

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{صفر} \quad \therefore 1 + \text{ج} 4 = 0 \quad \therefore \text{ج} 4 = -1 \quad \therefore \frac{1}{4} = \text{ج} 4$$

ثانياً: المماس رأسى ([محور الصادات)

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{غير معرف} \quad \therefore 10 - \text{ج} 6 = 0 \quad \therefore \text{ج} 6 = 10$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} = \text{ج} 6 \quad \therefore 0 = (2 - \text{ج} 6)(1 + \text{ج} 3) \quad \therefore \text{ج} 6 = 2 \quad \therefore \text{ج} 3 = 1$$

$$\text{[42]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad 10 - \text{ج} 6 = \text{ص} , \quad 4 + \text{ج} 4 = \text{ص} \quad \therefore$$

$$\frac{1 + \text{ج} 4}{4 + \text{ج} 6} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad \therefore$$

أولاً: المماس رأسياً ([محور الصادات)

$$\therefore \quad 10 - \text{ج} 6 = 0 \quad \therefore 4 + \text{ج} 4 = 0 \quad \therefore \text{ج} 6 = 10 \quad \therefore \text{ج} 4 = -4$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} = \text{ج} 6 \quad \therefore \text{ج} 3 = 1 \quad \therefore \text{ج} 6 = 2$$

ثانياً: المماس أفقى ([محور السينات)

$$\therefore \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{صفر} \quad \therefore 1 + \text{ج} 4 = 0 \quad \therefore \text{ج} 4 = -1 \quad \therefore \frac{1}{4} = \text{ج} 4$$

$$\text{ص} + \text{س} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 0$$

$$\therefore \quad \text{س} + \text{ص} = 10 \quad \therefore \text{ص} = 0 \quad \text{وبالقسمة على 0 ص}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3 + \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad \therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3 \quad \therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3 \quad \therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3$$

$$\text{[30]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad 1 - \text{ص} + 1 - \text{ص} = 0$$

$$\therefore \quad 1 - \text{ص} + 1 - \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 1 \quad \therefore \text{ص} = 1$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 1 \quad \therefore \text{ص} = 1$$

وبضرب الطرفين $\times \text{ص}$

$$\therefore \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص}$$

$$\therefore \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad \therefore$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$$\therefore \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص}$$

$$\therefore \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص}$$

$$\therefore \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص} \quad \text{ج} = \text{ص}$$

$$\text{[32]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad 4 + \text{ص} + 4 + \text{ص} = 0$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0$$

$$\text{[33]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \frac{2}{\pi} + \text{س} = 0$$

$$\therefore \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص}$$

$$\therefore \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص}$$

$$\text{[34]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص} \quad \text{س} = \text{ص}$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0$$

$$\text{[35]} \quad \text{س} = \text{ص} \quad 14 - \text{ص} + 14 - \text{ص} = 0$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0$$

$$\therefore \quad \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0$$

٤ - جا ٢ س \therefore د $(\frac{\pi}{4}) //$ \therefore ٤ - جا ٩٠ = ٤ -

[٧] ص \therefore ٢ جا س جتا س = جا ٢ س

\therefore ص $//$ ٢ جتا ٢ س \therefore ص $//$ ٤ - جا ٢ س

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

[٨] ص \therefore ٢ جتا س \times - جا س = - جا ٢ س

\therefore ص $//$ - جتا ٢ س \times ٢ = - جتا ٢ س

[٩] د (س) = جتا ٢ س

\therefore د (س) = - جا ٢ س

\therefore د (س) = - جا ٢ س \therefore د $(٠) //$ ٤ - = ٤ -

[١٠] ص \therefore - جتا س = ص $//$ جا س

\therefore المطلوب = صفر

[١١] ص = - جتا ٢ س

\therefore ص \therefore ٢ جا ٢ س

\therefore ص $//$ ٤ جتا ٢ س = ٤ - ص

[١٢] $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = ٢ جا ع جتا ع$ ، $\frac{و}{ع} = - جا ع$

\therefore $\frac{و}{ع} = - جا ع$ \therefore $\frac{و}{ع} = ٢ جا ع$ \therefore $\frac{و}{ع} = ٢ جا ع$

[١٣] د (س) = ٣ س - ٢ س + ٦

\therefore د (س) = س - ٦ \therefore د $(٠) //$ ٦ - = ٦ -

[١٤] ٢ - (س + ٢ س) - ٣ = ٠ ومنها س = ١

[١٥] د (س) = ٢ جا س جتا س = جا ٢ س

\therefore د (س) = ٢ جتا ٢ س ، بوضع جا س = ٠

\therefore س = ٠ \therefore د $(٠) //$ ٢ = ١ \times ٢ = ٢

[١٦] $١٢٠ = ٥$

[١٧] $\frac{و}{س} = ٢ س - ٤ س + ٣ س - ٢ س + ٧$

$\frac{و}{س} = ٨ س - ٣ س + ٢ س - ٤ س - ١$

$\frac{و}{س} = ٢٤ س - ٢ س - ٦ س + ٤$ ، $\frac{و}{س} = ٤٨ س - ٦ س$

$\frac{و}{س} = ٤٨$ ، $\frac{و}{س} = ٦٨$ ، صفر

[١٨] ص \therefore ٤ س - ٣ س + ٥ س + ٠ = ص \therefore ١٢ س -

١٠ س ، ع \therefore ٣ س + ٧ = ع \therefore ٦ = ع

\therefore $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = \frac{٥}{٣} - ٢$

[١٩] ص \therefore ١ + ٢ س = ص \therefore ٢ = ص

ع \therefore $\sqrt{١ - ٢ س} = ع$ \therefore $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = \frac{١}{١ - ٢ س}$

\therefore $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = \frac{٢}{١ - ٢ س}$

[٢٠] ص \therefore $\sqrt{١ + ٨ س} = ص$ \therefore $\frac{و}{ص} = \frac{و}{ص} = \frac{١}{١ + ٨ س}$

ع \therefore $\frac{و}{١ + س} = ع$ \therefore $\frac{١}{٢(١ + س)} = ع$

\therefore $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = \frac{٢(١ + س)}{١ + ٨ س} = \frac{٤ \times ١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

[٢١] ص = س - جا س \therefore ص \therefore ١ - جتا س ،

ع \therefore ١ - جتا س \therefore ع = جا س

\therefore $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = \frac{١ - جتا س}{٦٠ جا} = \frac{١ - جتا ٦٠}{٣}$

[٢٢] ص \therefore $\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right) = ص$ \therefore $\frac{٢ - س}{٢(١ - س)} = ص$

ع \therefore $\sqrt{١ + ٢ س} = ع$ \therefore $\frac{١}{١ + ٢ س} = ع$

\therefore $\frac{و}{ع} = \frac{و}{ع} = \frac{١ + ٢ س}{١ - س} = \frac{٩ \sqrt{٢} - ١}{٩} = \frac{٢}{٣}$

المجموعة الثالثة:

مسائل على المشتقات العليا

أكمل ما يأتي:

[١] جا س + جتا س - جا س - جتا س = صفر

[٢] ٦ س + ٤ = ٤ \therefore ب = صفر

[٣] صفر

[٤] ٢٤ س

[٥] $\frac{و}{س} = ٣ س \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$ \therefore $\frac{و}{س} = \frac{٣}{٢}$ ، صفر

[٦] د (س) = ٢ جتا ٢ س \therefore د (س) =

$$\frac{4}{9} (2 + 2s) - \frac{4}{9} (2 - 2s + 2 + 2s) =$$

$$\frac{4}{9} (2 + 2s) - \frac{4}{9} (2 + 2s) =$$

$$\text{د (س)} \equiv 2s - 2s + 2s = 2s \quad [23]$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\text{د (س)} = 1 \times (2s + 2) + \frac{1}{2} \times 2s = \frac{1}{2} \times 2s + 2s \quad [24]$$

$$(2s + 2) \times \frac{1}{2} = 2s \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = s + 1$$

$$\frac{1}{2} (2s + 2)$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1$$

$$(2s + 2) \times \frac{1}{2} = 2s \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = s + 1$$

$$2s = \frac{1}{2} (2s + 2) - s = \frac{1}{2} (2s + 2) - s$$

$$(2s + 2) \times \frac{1}{2} = 2s \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = s + 1$$

$$\text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s \quad [25]$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$= 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (1 + s) \times 1}{2(1 + s)} \quad [26]$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (1 + s) \times 1}{2(1 + s)}$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (1 + s) \times 1}{2(1 + s)}$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (1 + s) \times 1}{2(1 + s)}$$

$$\text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2} = \frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2} \quad [27]$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2} = \frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2}$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2} = \frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2}$$

$$\frac{2s \times 1 - (2 - 2s) \times 1}{2} =$$

$$\frac{3 \times 4 (2 - 2s) = 12 (2 - 2s)}{2s} \quad [18]$$

$$\frac{3 \times 4 (2 - 2s) = 12 (2 - 2s)}{2s}$$

$$\frac{3 \times 4 (2 - 2s) = 12 (2 - 2s)}{2s}$$

$$\frac{3 \times 4 (2 - 2s) = 12 (2 - 2s)}{2s}$$

$$9720 = 12 (2 - 2s)$$

$$\text{وعندما } s = 1 \text{ فإن } \frac{9720}{2s} =$$

$$\frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s} \quad [19]$$

$$\frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s} = \frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s}$$

$$\frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s} = \frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s}$$

$$\frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s} = \frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s}$$

$$\text{من (1)} \therefore \frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s} = \frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s}$$

$$\frac{40}{8} = 5 = \frac{7 + 2s + 3s + 4s}{2s}$$

$$\text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s \quad [20]$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\therefore \text{د (س)} = 2s - 2s + 2s = 2s$$

$$\text{د (س)} = \frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1 \quad [21]$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1$$

$$\frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1$$

$$\frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1$$

$$\text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (2 + 2s) \times 1}{2} = \frac{2s \times 1 - (2 + 2s) \times 1}{2} \quad [22]$$

$$\therefore \text{د (س)} = \frac{2s \times 1 - (2 + 2s) \times 1}{2} = \frac{2s \times 1 - (2 + 2s) \times 1}{2}$$

$$\frac{1}{2} (2s + 2) = s + 1$$

$$\frac{2s \times 1 - (2 + 2s) \times 1}{2} = \frac{2s \times 1 - (2 + 2s) \times 1}{2}$$

■ [٢٨] ص ٦ = ١١ + ١ - ١٠

∴ $\frac{ص}{وس} = \frac{١١ + ١ - ١٠}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$ (١)

$\frac{ع}{وس} = \frac{٢ - ١}{١٢} = \frac{١}{١٢}$ (٢)

بطرح (١) - (٢)

∴ $\frac{ع}{وس} - \frac{ص}{وس} = \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٦} = ١٠$

■ [٢٩] بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى ص

∴ $٦ ص \frac{وس}{وس} = ٦ - ٢ = ٤$

ص $\frac{وس}{وس} = ٢ - ١ = ١$ وإجراء الاشتقاق ثانية

∴ $\frac{وس}{وس} \times \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} \times \frac{وس}{وس} = ٢ - ١ = ١$

∴ $ص \frac{وس}{وس} = ١ + ٢ = ٣$

■ [٣٠] بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى ص

∴ $١٢ ص \frac{وس}{وس} = ٣$

وإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى ص ثانية

∴ $٣ ص \frac{وس}{وس} = ٢ - ١ = ١$

بالقسمة على ص في الطرفين

∴ $\frac{٣}{ص} = \frac{٢}{ص} - \frac{١}{ص}$

■ [٣١] بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى ص :

∴ $١ \times ص + \frac{وس}{وس} \times ص = ١ - ٠ = ١$ وإجراء الاشتقاق

مرة أخرى ∴ $\frac{وس}{وس} \times ص + \frac{وس}{وس} \times ص = ١ - ٠ = ١$

وبالضرب في ص ∴ $٢ ص \frac{وس}{وس} = ١ - ٠ = ١$

∴ $\frac{٢}{ص} = \frac{١}{ص} - ٠ = ١$

∴ الأيمن = $٢ - ١ = ١$

∴ $٢ ص \frac{وس}{وس} = ١ - ٠ = ١$ من (١) الأيسر

■ [٣٢] $٢ ص \times ص + ٢ ص \frac{وس}{وس} = ٢$

∴ $\frac{وس}{وس} = \frac{٢}{٢} = ١$

∴ $\frac{وس}{وس} = \frac{٢}{٢} = ١$

∴ $\frac{٢}{٢} = ١$

■ [٣٣] $٢ ص \times ١ - ١ ص = ١ - ٠ = ١$

بالقسمة على ص $١ - ٠ = ١$

∴ $١ ص = ١$

∴ $١ ص = ١$

ومن (١) $\frac{وس}{وس} = ١$ وبالتعويض في (٢)

∴ $١ ص = ١$

∴ $١ ص = ١$

∴ $\frac{١}{١} = ١$

■ [٣٤] بالتفاضل مرتين متتاليتين بالنسبة إلى ص

∴ $١ + ٢ ص \frac{وس}{وس} = ٢ + ١ = ٣$ (١)

∴ $٢ ص \frac{وس}{وس} = ٢ + ١ = ٣$

∴ $\frac{٢}{ص} = ٣$ (٢)

ومن (١) $\frac{وس}{وس} = ٣$ وبالتعويض في (٢)

∴ $\frac{٢}{ص} = ٣$

∴ $(١ + ٢ ص) \frac{وس}{وس} = ٤$

■ [٣٥] $\frac{(١ + ٢ ص) - (٢ - ١ ص)}{(٢ - ١ ص)} = \frac{١}{٢ - ١ ص}$

∴ $٢ - (٢ - ١ ص) = ١$

∴ $\frac{١}{٢ - (٢ - ١ ص)} = ١$

∴ الأيسر $\frac{١}{٢ - (٢ - ١ ص)} = ١$

[٣٦] بتربيع الطرفين $\therefore \text{ص}^2 (1 + \text{س}) = 1$

وبالتفاضل

$\therefore 2 \text{ص} \frac{\text{وص}}{\text{وس}} (1 + \text{س}) + \text{س}^2 \text{ص} = 0$

وبالقسمة $\div 2 \text{ص}$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} (1 + \text{س}) + \text{س} = 0$ وبالاشتقاق ثانية

$\therefore \frac{2 \text{وص}}{\text{وس}^2} (1 + \text{س}) + \text{س}^2 \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{ص} + \text{س} = 0$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$

$\therefore \frac{2 \text{وص}}{\text{وس}^2} (1 + \text{س}) + \text{س}^2 \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{ص} = 0$

[٣٧] د (س) = $\frac{1}{2} - (1 + \text{س})$

$\therefore \text{د}'(س) = 1 - (1 + \text{س}) \times \frac{1}{2} + \text{س} \times \frac{1}{2} = 0$

$(1 + \text{س}) \times \frac{1}{2} = \text{س}$

$= \frac{1}{2} - (1 + \text{س}) = \frac{1}{2} - (1 + \text{س}) = \frac{1}{2} - 1 - \text{س} = -\frac{1}{2} - \text{س}$

$\therefore \text{د}''(س) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ وفي المطلوب

الطرف الأيمن = $1 - (1 + \text{س}) \times \frac{1}{2} - \text{س}^2 \times \frac{1}{2} - (1 + \text{س}) \times \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - (1 + \text{س})$

$= -\frac{1}{2} - (1 + \text{س}) + \frac{1}{2} - (1 + \text{س}) = -1 - 2\text{س}$

[٣٨] $2 \text{ص} \frac{\text{وص}}{\text{وس}} - (\text{ص} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{س} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}}) = 0$

$\therefore 2 \left[\frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{س} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \right] - \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \text{س} - \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$

$\therefore 2 \left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}} \right) + \text{س}^2 \text{ص} \frac{\text{وص}}{\text{وس}} - \frac{\text{وص}}{\text{وس}} - \text{س} \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$

$\therefore \frac{2 \text{وص}}{\text{وس}^2} (2 - \text{س}) + (2 - \text{س}) \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$

[٣٩] $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \therefore \text{س} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ص}$

$\therefore 1 \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{س} \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$ صفراً

[٤٠] بالضرب التبادلي

$\therefore \text{ص} (1 - \text{س}) = 1 + \text{س}$

$\therefore 3 = \text{ص} \times 2 (1 - \text{س}) + (1 - \text{س})^2 \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

وبالاشتقاق مرة أخرى

$\therefore 2 \text{ص} + 2 (1 - \text{س}) \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + (1 - \text{س})^2 \frac{2 \text{وص}}{\text{وس}^2} = 0$

$+ \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times 2 (1 - \text{س}) = 0$

[٤١] $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0 = (1 + \text{س}) \sqrt[4]{\text{س}^2 + 1}$

$(1 + \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 1})$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{(1 + \text{س}) \sqrt[4]{\text{س}^2 + 1}}{\text{س}^2 + 1}$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{س}^5}{\text{س}^2 + 1}$ وبالتربيع والضرب التبادلي

$\therefore (\frac{\text{وص}}{\text{وس}})^2 (1 + \text{س}) = 2 \text{ص}^2$ وبالاشتقاق

$\therefore 2 \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + (1 + \text{س}) \frac{2 \text{وص}}{\text{وس}^2} = 2 \text{ص} \times 2 \text{س}$

$= 0 \therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 0$ وبالقسمة $\div 2 \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

$\therefore (1 + \text{س}) \frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{س} \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 2 \text{ص} = 0$

[٤٢] من قاعدة التسلسل $\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ع}}$

، بمفاضلة طرفي القاعدة بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{وس}} + \frac{\text{ع}}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{ع}} + \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ع}}$

$= \frac{\text{وص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{وس}} + \frac{\text{ع}}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{ع}} = \frac{\text{وص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{وس}}$

[٤٣] $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{1}{\text{وس}} \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times 1 \times \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

عندما $\text{وس} = 2 \therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وص}}{2 \times 2} = \frac{\text{وص}}{4}$

[٤٤] $\text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س}^3 - 3$

$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س}^3 - 3 = \text{ع} \therefore \text{ع} = 2 \text{س}^3 + \text{س}^2 - 3$

$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{وس}} = 2 \text{س}^3 + \text{س}^2 - 3 \therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = \frac{\text{وص}}{\text{ع}}$

المجموعة الرابعة :

مسائل على التطبيقات الهندسية

أولاً : أكمل ما يـ .

[1] $٢ ص ص + ١ ص = ٠$ $\therefore ١٢ ص + ١ ص = ١٢ \times$

[2] $٠ = ٢ -$ $\therefore ١ ص =$ ميل المماس $= ٤ -$

[3] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[4] $١ = (٢ -) + ٣ = (١) د$ $\therefore ١ = (٢ -) + ٣ = (١) د$

[5] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[6] $٠ =$ $\therefore ١ ص =$ ظاهر $= ١ -$ $\hat{هـ} = ١٣٥$

[7] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[8] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[9] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[10] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[11] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[12] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[13] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[14] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[15] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[16] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[17] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[18] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[19] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[20] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[21] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[22] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[23] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[24] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[25] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[26] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[27] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[28] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[29] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[30] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[31] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[32] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[33] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[34] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[35] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[36] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[37] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[38] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[39] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[40] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[41] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[42] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[43] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[44] $١ ص ص + ١ ص = ٤$ $\therefore ٢ ص + ١ ص = ٤$

[٣٣] الأول: د/ (س) = -٤س - ٩س' . د/ = ١

(٢ -) = -٤ ، الثاني: ص (١ + س') = ٨ - ٢س .

ص' (١ + س') = ٢س + ٢س = ٤ ، عندما س = ١ ،

ص = ٢ . د/ ٢ = ١ + ١ + ٢ = ٤ - ٢ = ٢

م = ٤ - ، م = ١ ، المماسان متوازيان .

[٣٤] ٢٢ س + ٢ ص' - ٢ ب + ص' = ٠ .

ص' = ٢ - ٢س / ٢ + ص' = ٠ عند (١، ١) . د/ ٢ - ٢ = ٠

١ = ٢ ، بالتعويض في المعادلة الأصلية

٢ - ١ + ١ = ٢ = ب - ٢ = ٢ - ١ + ١

[٣٥] ٢ س + ٢ ص' = ٢ (ص + س') ، عند

(٠، ١) . د/ ٢ = ٠ + ٢ = ٢ ، ٢ = ٢

وبالتعويض في معادلة المنحنى الأصلية

١ = ب + ٠ = ٠ + ١

مسائل على معادلة المماس والعمودي لمنحنى:

[٤٠] ص' = جتا س = ١ . د/ ٠ = س . عند النقطة (٠، ٠)

[٤١] ٢ ص' = ٢ جتا س × (-جا س) ،

عند (١، ٠) . د/ ١ = ٢ - ٠ جا س = ٠ = صفر

معادلة المماس هي ص = ١

[٤٢] ص' = ١ / (١ + س²) = غير معرف عند س = ٠

٠ = ١ + ٠ = ١ = صفر

[٤٣] ص' = ٢س = ١ ، س = ١/٢

١/٢ = ١ + ١/٢ = ١/٢

[٤٤] ميل العمودي = ٣/٢ . ميل المماس = ٣/٢ = د/ (٣)

[٤٥] نضع ص = ٠ . د/ ٠ = ٥ - ٢س + ٦ = ٠

٢س = ٢ ، أ، س = ١ ، د/ (س) = ٢ - ٥ = ٠

١ = ٥ - (٢) ٢ = ١ ، ١ = ٥ - (٢) ٢ = ١

١ = ١ × ١ = ١ = ١ × ١ = ١

[٤٦] ٦ ص' - ٦ ص' - ١ = ٠ . د/ ص'

٦ ص' - ٦ ص' = ١ غير معرف لأنه [محور الصادات] .

٦ ص' - ٦ ص' = ٠ = ٦ - ١ = ٥ ، س = ٢ - ٥ = ٣

المماس هي ص = ١ ، معادلة العمودي هي س = ٣

[٤٧] بوضع س = ٠ . د/ ص' + ٤ ص' - ١٢ = ٠

(٦ + ص) (٢ - ص) = ٠ = ص = ٦ - ١ = ٥ ، ص = ٢

٢ س + ٢ ص' - ٤ ص' - ٤ = ٠ = ص' = ٢ - ٢س

عند (٠، ٦) : م = ١/٢ = معادلة المماس هي

٦ + ١/٢ س = ١ : أى : س + ٢ ص' + ١٢ = ٠

عند (٢، ٠) : م = ١/٢ = معادلة المماس هي

٢ - ١/٢ س = ١ : أى : س - ٢ ص' + ٤ = ٠

[٤٨] بحل المعادلتين معاً نحصل على نقطتي التقاطع:

ص' = ٢ + ٢ ص' = ص' = ٢ ، ص = ١ - ٢ = -١

س = ٩/٤ ، س = ١/٤ . د/ نقطتي التقاطع: (٩/٤، ٢)

(١، ١/٤) ، بالاشتقاق: ٢ ص' = ٤ ص' = ٢

عند (٩/٤، ٢) : معادلة المماس هي ص' - ٩/٤ = ٢

٩/٤ (س - ٢) : أى : ٣٢ س - ٣٦ ص' + ٤٩ = ٠

عند النقطة (١، ١/٤) : معادلة المماس هي

ص' - ١/٤ (س + ١) : أى : ٣٢ س - ٤ ص' - ٣١ = ٠

[٤٩] ص + س' = ٢س = ص' = ٢س - ٢س = ٠

٢ - ص = ٥ س (١) وبالتعويض في معادلة المنحنى

الأصلية . د/ ٤س = ١

٠ = ص' = ١/٢ = ص' = ٠

عند النقطة (١/٢، ٠) : معادلة المماس هي

ص' - ٠ = ١/٢ (س - ١/٢) : أى : ٢س - ٣ + ٤ = ٠

عند النقطة (١/٢، ٠) : معادلة المماس هي

ص' + ٠ = ١/٢ (س + ١/٢) : أى : ٢س + ٣ + ٤ = ٠

ص/ قاس ظا من \times جاس + ظا من جتا من \therefore م = قا 60
 ظا 60 جا 60 + ظا 60 جتا 60 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3
 \therefore معادلة المماس هي

$$\frac{3\sqrt{3}+6}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ص} - \frac{(\frac{\pi}{3} - \text{س})}{2} = \frac{3}{2}$$

 معادلة العمودي هي $\text{ص} - \frac{2}{3\sqrt{3}+6} = \frac{3}{2} - \frac{(\frac{\pi}{3} - \text{س})}{2}$

[55] ص/ جتا (س ص) \times (ص + س ص) = ص

$$\frac{\text{ص جتا (س ص)}}{\text{ص جتا (س ص)}} = \frac{9.0 \text{ جتا } 1}{9.0 \text{ جتا } \frac{\pi}{6} - 1} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$$

 \therefore معادلة المماس هي $\text{ص} - 1 = 0$
 معادلة العمودي هي $\text{س} - \frac{\pi}{6} = 0$

[56] عند س = π \Leftarrow ص = جا (جا 180) = جا 0
 \therefore ص/ جتا (جا س) \times جتا = جتا \times جتا (0) = 0
 \therefore معادلة المماس هي $1 = 1 \times 1$
 $\text{ص} - 0 = 0 \times 1 = (\pi - \text{س})$ أي: $\text{ص} = \pi - \text{س}$

[57] بالتعويض بالنقطة في معادلة المنحنى نجد أنها تحققها
 $\therefore (2, 2) \in$ المنحنى ، $\text{س} = 2$ ، $\text{ص} = 2$ ، $\text{ص} + \text{س} = 4$

$$\text{ص} - \frac{\text{س} - 2}{\text{ص} + 2} = \frac{2 - \text{س}}{\text{ص} + 2}$$

 \therefore معادلة المماس هي $\frac{8 - 6}{7} = \frac{2 - 6}{4 + 3} = \frac{2}{7}$
 $\text{ص} - \frac{8 - 6}{7} = \frac{2 - 6}{4 + 3}$ أي: $\text{ص} = 28 - 7 + 8 = 28$
 معادلة العمودي هي $\text{ص} - \frac{7}{8} = 2 - \frac{6}{8}$ أي: $\text{ص} = 5 - 8 = 0$

[58] $\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} \therefore \text{ص} = \text{ص}$

$$\frac{\text{ص} - 2}{\text{ص} + 2} = \frac{2 - 2}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0$$

 \therefore معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{2 - 2}{3} = 2 - \frac{2}{3}$ أي: $\text{ص} = 5 + 2 - 12 = 12$

[59] الأولى: $\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = 12 - 6 = 6$
 $\text{ص} - \frac{6}{6} = 2 - \frac{6}{6} = 2 - 1 = 1$
 الثانية: $\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = 12 - 6 = 6$
 $\text{ص} - \frac{6}{6} = 2 - \frac{6}{6} = 2 - 1 = 1$

[50] $\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} \therefore \text{ص} = \text{ص}$

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{ص} - 1}{\text{ص} + 1} \Rightarrow \text{ص} = 4 - \text{ص} = 2 - \text{ص} \Rightarrow \text{ص} = 2$$

 \therefore معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{2 - 1}{2 + 1} = 2 - \frac{1}{3}$
 عند $(\frac{1}{3}, 1)$: معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{1 - 1}{1 + 1} = 1 - \frac{0}{2} = 1$
 أي: $\text{ص} = 9 - 4 = 5$

[51] ميل العمودي = -2 \therefore ميل المماس = $\frac{1}{2}$

$$\frac{\text{ص} - 2}{\text{ص} + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ص} = 2 - 4 = -2$$

 \therefore معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{2 - 2}{-2 + 2} = 2 - \frac{0}{0}$
 أي: $\text{ص} = 5 - 2 = 3$
 عند $(2, 1)$: معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{1 - 1}{2 + 1} = 2 - \frac{0}{3} = 2$
 أي: $\text{ص} = 5 + 2 = 7$

[52] $\text{ص} - \frac{\text{س} - 2}{\text{ص} + 2} = \frac{2 - \text{س}}{\text{ص} + 2}$
 \therefore معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{2 - 2}{3 + 2} = 2 - \frac{0}{5} = 2$
 أي: $\text{ص} = 5 + 2 = 7$

[53] $\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} = \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} \therefore \text{ص} = \text{ص}$

$$\frac{\text{ص} - 4}{3 - \text{ص}} = \frac{2 - 4}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

 \therefore معادلة المماس هي $\text{ص} - \frac{2 - 4}{3 - 1} = 2 - \frac{-2}{2} = 2 + 1 = 3$
 أي: $\text{ص} = 1 - 3 = -2$

[54] عند س = $\frac{\pi}{3}$ \therefore ص = ظا 60 جا 60 = $\frac{3}{4}$

عند $P \Rightarrow 2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$62,5 = \frac{20}{2} \times 10 \times \frac{1}{2} =$ وحدة مساحة

[64] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

وعند $10 = 40$ \therefore ميل المماس = قتا $40 = 40$

معادلة المماس هي: $ص - م = 40 - 40 = 0$ \therefore $ص = م$

أي: $ص - م = 40 - 40 = 0$ \therefore $ص = م$

المجموعة الخامسة :

مسائل على المعدلات الزمنية المرتبطة

أولاً: أكمل ما يأتي :

[1] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[2] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[3] بعد مرور 3 ثوان يكون $20 = 2 \times 2 + 0 = 4$ \therefore $20 = 2 \times 2 + 0 = 4$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[4] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[5] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[6] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

النقطة (1, 2) تحقق كلا المعادلتين \therefore الدائرتان متماستان

[60] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

أي: $ص = م$ \therefore $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[61] الأول: $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

الثاني: $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

مثلاً: $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

ومن (3): $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

معادلة العمودي هي $ص - م = 0$ \therefore $ص = م$

أي: $ص - م = 0$ \therefore $ص = م$

[62] $\frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

هي $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

الذي يقطع محور السينات عند $(0, 0)$ ، معادلة العمودي

هي $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

الذي يقطع محور السينات في $P(0, 5)$ \therefore مساحة المثلث

المطلوب $= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12,5$

$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

[63] بوضع $ص = 0$ \therefore $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

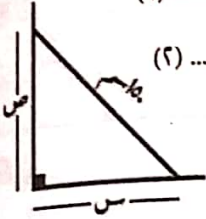
$\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

ب $(0, 4)$ \therefore $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

المماسين في ج ، كان ج \perp P ، P و B لتساوي

المماسين فإن: $2 \times 2 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 20 \Rightarrow 2 = 10$ $\therefore \frac{20}{2} = 10$ \therefore ظل $P = 10$ \therefore ج $5 = \frac{20}{2} \times 5 = 50$ \therefore م $(\Delta P \text{ ب ج})$

■ [٣٣] س + ص = ١٥٠ (١)



∴ س + ص = ١٥٠ (٢)

عندما س = ٩٠ ومن (١)

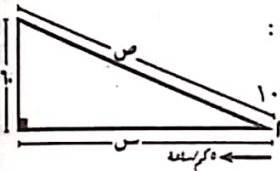
∴ (٩٠) + ص = ١٥٠

∴ ص = ١٤٤٠٠ = ص = ١٢٠ سم ومن (٢)

∴ ٠ = ١٢٠ × ٩٠ + ٢ × ٩٠ ∴ ٠ = ١٠٨٠٠ + ١٨٠ = ١١٠٠٠ سم/ث

■ [٣٤] ص = س + ٣٦٠٠ (١)

٢ ص = ٢ س + ٣٦٠٠ (٢)



من (١) عندما س = ٨٠ فإن :

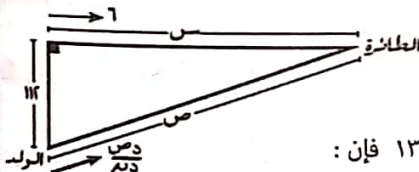
١٠٠٠٠ = ٣٦٠٠ + ٦٤٠٠ = ص

ص = ١٠٠ ، ومن (٢) :

١٠٠ = ١٠٠ × ٨٠ + ٢ × ٨٠ ∴ ١٠٠ = ٨٠٠٠ + ١٦٠ = ٨١٦٠ سم/ث

■ [٣٥] ص = س + ١١٢ (١)

٢ ص = ٢ س + ١١٢ (٢)



من (١)

عندما ص = ١٣٠ فإن :

١٣٠ = س + ١١٢ ∴ س = ١٨

∴ س = ٦٦ ومن (١) : ∴ ٦٦ × ٦٦ = ٤٣٥٦ سم/ث

∴ ٣,٠٥ = ٣,٠٥ سم/ث

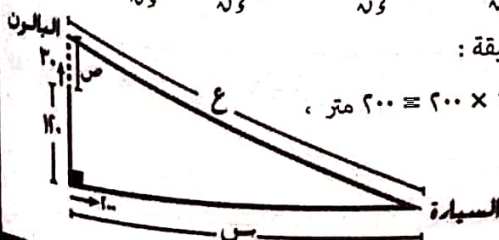
■ [٣٦] ع = س + (١٢٠ + ص) (١)

ع = س + ص + ١٢٠

٢ ع = ٢ س + ٢ ص + ٢٤٠ (٢)

بعد دقيقة :

س = ٢٠٠ × ١ = ٢٠٠ متر



■ [٣٧] م = π × نصفه ∴ π × نصفه = ٢ × نصفه (١)

عندما π × نصفه = π × نصفه فإن نصفه = ٢ ومن (١)

∴ ٢ × π × نصفه = ٤ ∴ نصفه = ٢ × ١/π = ٢/π سم/ث

■ [٣٨] عرض المستطيل = س ∴ طوله = ٢ سم

∴ مساحته = م = ٢ سم ∴ ٢ سم = ٢ سم

= ٤ × ٥ × ١/١٠٠٠ = ٠,١ سم/ث

■ [٣٩] المساحة : ص = ١/٢ × ل × ج = ٦٠ × ١/٢ × ٣√٧ ∴ حيث

ل طول ضلع المثلث ∴ ٣√٧ × ١/٢ × ل = ٦٠ ∴ ل = ٦٠ × ٢/٣√٧ = ٤٠ سم

= ٣√٧ × ١/٢ × ٤٠ = ٦٠ سم/ث

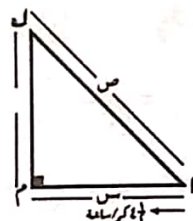
■ [٣٠] طول ضلع القاعدة في أى لحظة = س سم ∴

الارتفاع = ١/٢ س ، وبفرض المساحة = ص سم

∴ ص = ١/٢ × س × ١/٢ س = ١/٤ س² ∴ ٢ × ١/٤ = ١/٢ سم/ث

س × ١/٢ = ١/٢ سم/ث ∴ ١/٢ × س = ١/٢ ∴ س = ١ سم

ومنها س = ١٠ سم



■ [٣١] ص = س + ٩ (١)

∴ ٢ ص = ٢ س + ١٨ (٢)

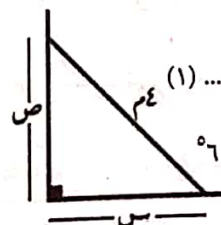
عندما س = ٤ ومن (١)

∴ ص = ١٣ = ٩ + ٤

∴ ص = ٥ ، ومن (٢) : ∴ ٥ × ٢ = ١٠ سم/ث

∴ ١٨/٥ = ٣,٦ سم/ث

■ [٣٢] س + ص = ١٦



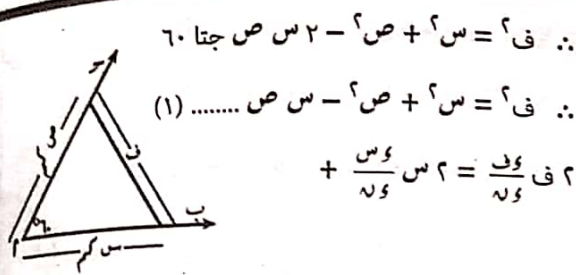
∴ ٢ س + ٢ ص = ٣٢ ∴ ص = ١٦ - س

وعندما يميل السلم على الحائط بزاوية ٦٠°

فإن س = ٤ جا ٦٠ = ٣,٦ متر

ص = ٤ جتا ٦٠ = ١,٢ متر وبالتعويض في (١)

∴ ٢ × ٣,٦ + ٢ × ١,٢ = ١٦ ∴ ١٢ + ٢ = ١٤ سم/ث



∴ في $س = س' + س'' - ٢$ ص جتا ٦٠

∴ في $س = س' + س'' - س$ ص (١)

٢ في $\frac{س}{س} = \frac{س}{س} + \frac{س}{س}$

٢ ص $\frac{س}{س} - \frac{س}{س} - \frac{س}{س}$ ص (٢)

زمن السيارة الأولى $\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}$ ساعة ∴ $س = \frac{١}{٤} \times ١٦$

$٨ =$ كم ، زمن السيارة الثانية $\frac{١}{٤}$ ساعة ∴ $س = \frac{١}{٤} \times ٢٠$

$٥ =$ كم ، من (١) ∴ في $س = (٨) + (٥) - ٢ = ١١$

∴ في $٧ =$ كم ، ومن (٢)

∴ $\frac{س}{س} = \frac{١٦ \times ١٦ \times ١٤}{٢٠ \times ٨ - ٢٠ \times ١٠ + ١٦ \times ١٦}$

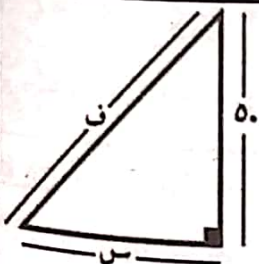
∴ $\frac{س}{س} = \frac{١٤}{٢١٦} = \frac{١٠٨}{٧}$ ∴ $\frac{س}{س} = \frac{١٠٨}{٧}$ كم/س

■ [٤٥] عندما $س = ٢٠$ فإن $٨٠ = ٢٠ \times ح$

∴ $ح = \frac{٨٠}{٢٠} = ٤$ ∴ $٨٠ = س \times ح$

∴ $ح = \frac{س}{س} + \frac{س}{س} = ٤$ ∴ $٨٠ = \frac{س}{س} \times ٢٠ + ١٨ \times ٤$

∴ $\frac{س}{س} = \frac{٤}{١٦} = ٠.٢٥$ سم/د



■ [٤٦] بفرض البعد عن قاعدة

المناطة = س متر

، البعد عن قمة المناطة = ف متر

∴ في $س = (٥٠) + س'$

، بفرض شدة الاستضاءة = ص

∴ $ص = \frac{ك}{ف}$ حيث ك ثابت

ص = ك (٢٥٠٠ + س) ∴ $\frac{ك}{ف} = \frac{ك}{٢٥٠٠ + س}$

س' = $٢ \times س$ ∴ عندما $س = ٥٠$ متر

∴ $١٠٠ = س$ ∴ $١٠٠ = ك (٢٥٠٠ + س)$ ∴ $١٠٠ = ك (٢٥٠٠ + ١٠٠)$

س = ١٠٠ ∴ $١٠٠ = ك (٢٥٠٠ + ١٠٠)$ ∴ $١٠٠ = ك (٢٦٠٠)$

وبالقسمة (٢) ÷ (١) ∴ $\frac{١٠٠}{٢٦٠٠} = \frac{ك (٢٦٠٠)}{ك (٢٥٠٠ + ١٠٠)}$

عندما $س = ٢$ سم ، ومن (١) ∴ $٤٦ + ٢٤ - ٩ = س'$

٤٩ ∴ $س = ٧$ سم ، ومن (٢) ∴ $\frac{س}{س} = \frac{١٤}{٧} = ٢$

٢ × ٨ ∴ $\frac{س}{س} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ ∴ $\frac{س}{س} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ سم/ث

■ [٤٢] ص' = س' + س' - ١٦ + ٢ × س × ٤ جتا ١٢٠

∴ $س' = ١٦ - س' + س' - \frac{١}{٢}$

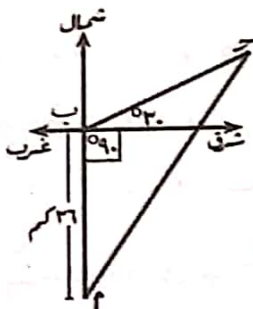
∴ $س' = س' + س' + ٤ + ١٦$ (١) ∴ $س' = \frac{س}{س} = ٢$

س $\frac{س}{س} + \frac{س}{س} = ٤$ (٢) ، ومن (١) عندما $س = \frac{١}{٢}$

فإن $س' = ٢ = \frac{١٦}{٤} + \frac{٤}{٤} + \frac{٤}{٤} = ٢$ ∴ $\frac{١٦}{٤} = ٢٠ + \frac{٤}{٤} = ١٦ + \frac{٤}{٤}$

∴ $س = \frac{١٢}{٢} = ٦$ ، ومن (٢) ∴ $\frac{١٢}{٢} = \frac{١٢}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٦$

(٧٨ -) ومنها $\frac{س}{س} = \frac{٦٦}{٧٨}$ كم/س



■ [٤٣] بعد ٢ ساعة

ب' = ٢ × ١٨ = ٣٦ كم

، بعد ٧ ساعة أخرى :

ب' = ١٨ + ٣٦ = ٥٤ كم

∴ $١٢٠ = ٣٠ + ٩٠ = \widehat{ب'ب'س}$

في $\Delta ب'ب'س$: نفرض $ب'س = ج'$

∴ في $س' = (٣٦) + (١٨) - ٢ = ٥٤$ جتا ١٢٠

$١٢٩٦ + ٢٢٤٤ + ٦٤٨ = س'$ (١) ، عندما $س = ٧$ ساعة

∴ في $س' = ٢ \times ١٢٩٦$

∴ في $س' = ٢٦٨٤$ كم ، ومن (١) بالاشتقاق ∴ $س' = \frac{س}{س} = ٢$

$٦٤٨ + ٢٦٨٤ =$

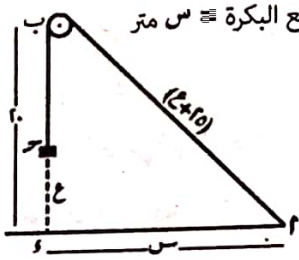
عندما $س = ٢$ ∴ $٦٤٨ + ١٢٩٦ = \frac{س}{س} \times ٢٦٨٤$

∴ $\frac{س}{س} = \frac{٢٦٨٤}{٢٦٨٤} = ١$ كم/س

■ [٤٤] نفرض عند أي لحظة أن السيارة الأولى قطعت س كم

والثانية ص كم والمسافة بين السيارتين في كم

[٥٠] نفرض عند أى لحظة أن ارتفاع الثقل عن سطح الأرض



$$\begin{aligned} \text{ع} &= \text{بعد الرجل عن موقع البكرة} \approx \text{س متر} \\ \text{ب ج} &= ٢٠ - \text{ع} \\ \therefore \text{ب ج} &= ٢٠ - \text{ع} \\ \therefore \text{ب ج} &= ٢٠ - \text{ع} \\ \therefore \text{ب ج} &= ٢٠ - \text{ع} \end{aligned}$$

$\therefore (ع + ٢٥) = (٢٠) + \text{س}$ (١) بالاشتقاق :

$$\therefore (ع + ٢٥) = (٢٠) + \text{س} \quad \therefore \frac{د}{د\text{س}} (ع + ٢٥) = \frac{د}{د\text{س}} (٢٠) + ١$$

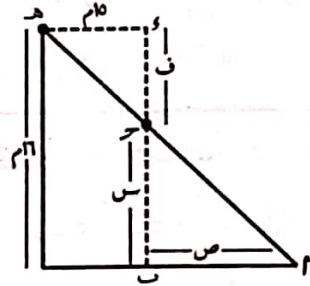
عندما $\text{س} = ١٥$ ومن (١) $\therefore (ع + ٢٥) = (٢٠) + ١٥$

$$\therefore (ع + ٢٥) = (٢٠) + ١٥ \quad \therefore ع = ١٠$$

$$\therefore ع = ١٠ \text{ ومن (٢) } \therefore \frac{د}{د\text{س}} (ع + ٢٥) = \frac{د}{د\text{س}} (٢٠) + ١$$

$$\therefore \frac{د}{د\text{س}} (ع + ٢٥) = \frac{د}{د\text{س}} (٢٠) + ١ \quad \therefore \frac{د}{د\text{س}} (ع + ٢٥) = \frac{د}{د\text{س}} (٢٠) + ١$$

[٥١] المسافة التى تقطعها الكرة بعد ل ثانية هى ف



حيث $\text{ف} = \frac{١}{٢} \text{ ل}^2$ (١)

بفرض ارتفاع الكرة عن

سطح الأرض عندئذ

$\text{س} =$ بعد ظلها عن

موقع سقوط الكرة

(ب) هو ب ج

ومن التشابه :

$$\frac{\text{س}}{١٥} = \frac{\text{ف}}{١٠} = \frac{\text{ل}}{٢٠}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١٥ \times \text{ل}}{٢٠} = \frac{٣ \times \text{ل}}{٤}$$

$$\therefore \text{ص} = ١٥ - \frac{٣ \times \text{ل}}{٤} = ١٥ - \frac{٣ \times ٤٩}{٤} = ١٥ - ٣٦,٢٥ = -٢١,٢٥$$

$$\therefore \text{و ص} = \frac{٤٨٠٠}{٣ \times ٤٩} = \frac{٤٨٠٠}{١٤٧} = ٣٢,٦٥$$

عندما $\text{س} = ٦$ متر فإن $\text{ف} = ١٠$ (١)

$$\therefore \frac{١٠}{٧} = \frac{١٠٠}{٤٩} \quad \therefore \frac{١٠}{٧} = \frac{١٠٠}{٤٩}$$

وبالتعويض فى (١)

$$\therefore \text{و ص} = \frac{٣٤٣ \times ٤٨٠٠}{١٠٠٠ \times ٤٩} = \frac{٣٤٣ \times ٤٨٠٠}{٤٩٠٠٠} = ٣٣,٦٥ \text{ متر}$$

[٤٧] نفرض أن طولى ضلعى القائمة فى أى لحظة هما س ،

$$\text{ص} \therefore \text{بعد ل} \text{ دقيقة : } \text{س} = ٨ - \frac{١}{٢} \text{ ل} \quad \text{ص} = ١ + ٦ = ٧$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢} \times (٨ - \frac{١}{٢} \text{ ل}) \times ٧ = ٧ - \frac{٧}{٢} \text{ ل}$$

$$\therefore (٧ + \frac{٧}{٢} \text{ ل}) = ٢٤ + \frac{٧}{٢} \text{ ل} \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

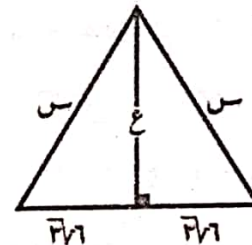
$$\therefore \frac{٧}{٢} = \frac{٢٤}{٢} \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

تتعدم الزيادة عندما $\frac{د}{د\text{س}} = ٠$ ، ومن (٢)

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$



$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٢٤ \quad \therefore ٧ = ٢٤$$

[٤٩] نفرض أن $\text{ل} = ٢$ ، ارتفاع شبه المنحرف =

$$\text{من التشابه : } \frac{ع - ٨}{٨} = \frac{٣}{٨} \quad \therefore ع - ٨ = ٣$$

..... (١)

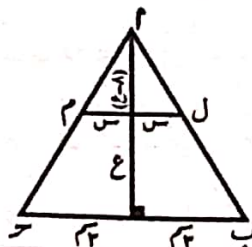
مساحة شبه المنحرف $\text{ل ب ج م} = \text{م}$

$$\therefore \frac{١}{٢} (٦ + \text{س}) \times ٢ = \text{م}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} (٦ + \text{س}) \times ٢ = \text{م}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} (٦ + \text{س}) \times ٢ = \text{م}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} (٦ + \text{س}) \times ٢ = \text{م}$$



$$\therefore \frac{١}{٢} (٦ + \text{س}) \times ٢ = \text{م}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} (٦ + \text{س}) \times ٢ = \text{م}$$

$$\times \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N} \therefore {}^3(0) \pi \frac{4}{3} - {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \mathcal{C}$$

$${}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = 16 - \therefore - \frac{L}{N} \times {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{\pi 16} - = \frac{16 -}{\pi \times 16 \times 4} = \frac{L}{N} \therefore \frac{L}{N} \times {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = 16 -$$

مساحة السطح الخارجي = ${}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = 16$

$$\frac{1 -}{\pi 16} \times 8 \times \pi 8 = \frac{L}{N} \times {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N} \therefore$$

$$- = 4 \text{ سم}^2$$

$${}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N} \therefore {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N} \therefore {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N}$$

$$\frac{1}{4} - = \frac{L}{N} \therefore \frac{L}{N} \times {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \pi \frac{4}{3} - \therefore (1) \dots$$

بعد 5 دقائق: $\mathcal{C} = \pi \frac{4}{3} \times 0 - \pi \frac{4}{3} \times 0 = 0$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 0 \therefore {}^3(s+0) = 0$$

$$\frac{1}{9} - = \frac{L}{N} \therefore \frac{L}{N} \times {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \pi \frac{4}{3} - \therefore (1) \dots$$

$$\mathcal{C} = \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 0 \therefore {}^3(s+0) = 0$$

$$\frac{L}{N} \times {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N} \therefore {}^3(s+0) \pi \frac{4}{3} = \frac{L}{N}$$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 0 \therefore {}^3(s+0) = 0$$

$$= 0 \text{ سم}^2$$

$$[59] \text{ بعد } 1 \text{ ساعة: } {}^3(s+0) = 12, {}^3(s+0) = 12, {}^3(s+0) = 12$$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 12 \therefore {}^3(s+0) = 12$$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 12 \therefore {}^3(s+0) = 12$$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 12 \therefore {}^3(s+0) = 12$$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 12 \therefore {}^3(s+0) = 12$$

$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 12 \therefore {}^3(s+0) = 12$$

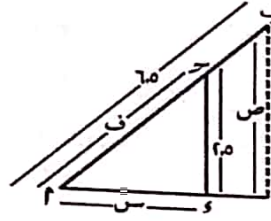
$$\therefore \pi \frac{4}{3} \times {}^3(s+0) = \pi \frac{4}{3} \times 12 \therefore {}^3(s+0) = 12$$

$$[60] \text{ نفرض طول ضلع القاعدة = } s, \text{ الارتفاع = } h$$

$$\therefore \text{الحجم} = \mathcal{C} = s \times s \times s = s^3 \therefore s^3 = 12$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$[52] \text{ نفرض أن } s = 1, f = 1, s = 1$$



$$\therefore f = s + (2,0) \therefore f = 2,0$$

$$\text{عندما } f = 2,0$$

$$\therefore (2,0) + s = (2,0) \therefore s = 0$$

ومنها $s = 1$ وباشتقاق (1)

$$\therefore f = 2,0 \therefore s = 2,0 \therefore f = 2,0$$

$$\therefore f = 2,0 \therefore s = 2,0 \therefore f = 2,0$$

$$\therefore f = 2,0 \therefore s = 2,0 \therefore f = 2,0$$

$$\therefore f = 2,0 \therefore s = 2,0 \therefore f = 2,0$$

$$\therefore f = 2,0 \therefore s = 2,0 \therefore f = 2,0$$

$$[53] \therefore \mathcal{C} = s^3 \therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ سم}^3$$

$$[54] \therefore \mathcal{C} = s^3 \therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$= 72 \text{ سم}^3$$

$$[55] \therefore \mathcal{C} = s^3 \therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$\therefore s^3 = 12 \therefore s = \sqrt[3]{12} \therefore s = \sqrt[3]{12}$$

$$[56] \text{ بفرض أن سمك الجليد في أي لحظة } s, \text{ حجمه } \mathcal{C}$$

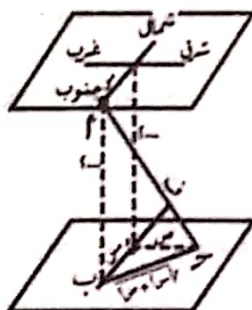
$$\begin{aligned} \times \frac{1}{3} \times 2 + (\sqrt{\frac{1}{3} + 12}) (\frac{1}{3}) \pi &= \frac{2}{3} \pi \\ \times (\sqrt{\frac{1}{3} + 12}) \pi &= [(\sqrt{\frac{1}{3} - 24}) (\sqrt{\frac{1}{3} + 12}) \\ &= (\sqrt{\frac{1}{3} - 10}) \cdot \text{عندما } \sqrt{\frac{1}{3}} = 0 \\ \pi 120 &= (0 - 10) (0 + 12) \pi = \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

١٦٤] ٦٤] ر = س + ص + ع (١)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi &= \frac{2}{3} \pi \text{ س} + \frac{2}{3} \pi \text{ ص} + \frac{2}{3} \pi \text{ ع} \\ \frac{2}{3} \pi &= \frac{2}{3} \pi \text{ س} + \frac{2}{3} \pi \text{ ص} + \frac{2}{3} \pi \text{ ع} \quad (2) \\ \text{بالتعويض في (١)} & \quad 169 = 144 + 9 + 16 = 2 \pi \\ \therefore \text{ر} &= 13 \cdot \text{من (٢)} \quad 12 + 2 + 1 \times 4 = 13 \frac{2}{3} \pi \\ \times (1 -) &= 6.5 - = \frac{2}{3} \pi \quad 6.5 - = \frac{2}{3} \pi \quad 0.5 - = \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

١٦٥] ٦٥] ب ج قائم الزاوية في ب

$$\begin{aligned} \therefore (ج ب) + (ب ج) &= (ج ب) \\ \therefore \text{في } (2000) &= \text{س} + \text{ص} \\ \therefore 400000 &= \text{س} + \text{ص} + \text{ع} \dots \dots (1) \end{aligned}$$



بعد ٤٠ ث :

$$\begin{aligned} \text{س} &= 40 \times 100 = 4000 \text{ متر} \\ \text{ص} &= 40 \times 70 = 2800 \text{ متر} \\ \text{من (١)} & \quad 490000 = \text{في} \\ \therefore \text{في} &= 7000 \\ \text{من (١) وبلاشتقاق} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi &= \frac{2}{3} \pi \text{ س} + \frac{2}{3} \pi \text{ ص} + \frac{2}{3} \pi \text{ ع} \\ 70 \times 2800 + 100 \times 4000 &= 7000 \frac{2}{3} \pi \\ \therefore \frac{11200}{7} &= \frac{2}{3} \pi \quad 112000 = 7000 \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

١٦٦] ٦٦] (أولاً) نفرض أن حجم المادة = ك

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} - \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \text{ك} \quad \text{حيث نغمة} = \text{طول} \\ \text{نصف القطر الداخلي} &= \text{نغمة} = \text{طول نصف القطر الخارجي} \\ \text{بالاتفاق} & \quad \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} - \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} - \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \text{وعندما نغمة} &= 8 \quad \text{فإن نغمة} = 4 + 8 = 12 \quad \text{وبالتعويض} \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} - 144 \frac{2}{3} \pi \text{ نغمة} &= 1.0 \times 74 - \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \text{بفرض سمك الكرة} &= \text{س} \quad \therefore \text{س} = \text{نغمة} - \text{نغمة} \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} - \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} - \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \text{مساحة السطح الداخلي} &= \text{م} = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \times 8 \times \pi 8 = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \text{مساحة السطح الخارجي} &= \text{م} = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \times 12 \times \pi 8 = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \end{aligned}$$

١٦٧] ٦٧] نفرض حجم المنشور ح . طول ضلع قاعدته س .

$$\begin{aligned} \text{ارتفاعه ع} & \quad \therefore \text{ح} = \text{س} \times \text{ع} \quad (\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}) \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \times \text{ع} + \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \times \text{ع} \dots \dots (1) \\ \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} (4 -) \quad 74 = 2 \times 4 \times 2 \times 8 + (4 -) \\ \therefore \text{يفقد الحجم عن الزيادة عندما} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} = \text{صفر} \\ \therefore \text{س} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} + \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \times \text{ع} = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \text{س} &= \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} + \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \times \text{ع} = \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} \\ \therefore \text{س} &= \text{ع} \quad \therefore 12 - 8 = 4 = 12 + 4 = 16 \quad \therefore \frac{2}{3} \pi \frac{4}{3} \text{ نغمة} = 16 \end{aligned}$$

١٦٨] ٦٨] $(\sqrt{\frac{1}{3} - 24}) (\sqrt{\frac{1}{3} + 12}) \pi = \text{ح}$

مجموعة تمارين الكتاب المدرسي

تمارين (١-١) من الكتاب المدرسي

$$\Leftrightarrow (س)^1_2 - (س)^1_3 = (س)^1_4 \quad \underline{\underline{[۱]}}$$

$$1 - = 2 \times 2 - 1 \times 3 = (1)'_3$$

$$\text{[2]} \quad \text{و} (س) = \text{ه} (س) + \text{د} (س) . \text{ر} (س) + \text{د} (س)$$

$$18 = 1 \times 0 + (3 -) \times 2 + 0 \times 0 = (2) \text{ ' } \wedge \Leftarrow (5) \text{ ' } \text{.}$$

$$(1) \quad \omega \Leftarrow \frac{d(s)}{2 + (s)} = \omega(s) \quad [3] \blacksquare$$

$$\frac{3}{\lambda} = \frac{(1-) \times 2 - [2 + 2] \times 1}{(2 + 2)} = \frac{[2 + (s)s](s)^{-2}}{2[2 + (s)s]} =$$

$$= (1)' \wedge \Leftarrow (s)' \wedge . [(s) \wedge]' \vee = (s)' \wedge \quad [4] \blacksquare$$

$$1. = 7 \times 0 = (1)' \mathcal{J} . (7)' \mathcal{D} = (1)' \mathcal{J} . [(1) \mathcal{J}]' \mathcal{D}$$

$[(س) 'د - ۳] ((س) د - ۳ س) 'ر = (س) 'و$ [۵]

$$[(\zeta)'_5 - 3][(\xi)_5 - 2 \times 3]'_7 = (\zeta) \sim \Leftarrow$$

$$(2 -) \times (2)' \text{ } \text{ } = [0 - 3] (2 - 6)' \text{ } \text{ } =$$

$$7 = (2 -) \times 3 - =$$

■ [٦] $\frac{1}{2}(s) = -[s^3 + (s) s] \times s^3 + s^3$

$$+ 1 \times 3] \times 3 - [2 + 1] 2 - = (1)' \text{و} \Leftarrow [(س)' \text{ر}$$

$$\frac{1}{rY} - 0 \times \frac{1}{rY} \times r = [(r)$$

۳ س ۲ - ۲ ق س ظا س = [۷]■

8] = - قتا (۲ - ۳ س) ظتا (۲ - ۳ س) × (- ۳)

۳ = ۳ قتا (۲ - ۳ س) ظتا (۲ - ۳ س)

$$\frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \left(\frac{1}{s} - \right) = \underline{\underline{[9]}}$$

■ [۱۰] = قأ (ظتا س) × (قتا؟ س)

= - قتا؟ س قاً (ظنا س)

۱۱ = (۱ + ظتا س) × (- قتا س)

$$= 2 \text{ قتا}^s (1 + \text{ظتا}^s)$$

■ [۱۲] $v = \text{قتا } ۲ \text{ س} \Leftarrow \frac{u}{u_s} = ۲ - \text{قتا } ۲ \text{ س ظنا } ۲ \text{ س}$

۱۳] $\frac{وس}{وس} = ۲ جا ۲ س + ۱۵ قتا ۳ س$

۱۴] $\frac{ص}{س} = ۳ \text{ قا } ۳ \text{ س} - (۲ \text{ قتا } ۲ \text{ س ظنا } ۲ \text{ س})$

$$= 3 \text{ قاسم } 3 + 2 \text{ قاسم } 2 \text{ ظنا } 2 \text{ س}$$

۱۵] $\frac{ص}{س} = ۲$ جا ۳ س \times جتا ۳ س \times ۳ + ۲ فاس \times

قاس ظا س = ۳ جا ۶ س + ۲ قا س ظا س

$$\frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{قاس ظا س ظا س} + \text{قاس قاس قاس} \quad [16]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \text{ قتا} - \times \sqrt{2} \text{ ظتا} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}} \quad [17]$$

$$= \frac{3-}{\sqrt{2}} \text{ ظلثا' ماس قتا' ماس}$$

$$\frac{\text{موص}}{\text{موس}} = 2 \text{ قتا } (1 + \text{س}) - \text{موس} \text{ قتا } (1 + \text{س}) \quad [18] \blacksquare$$

$$\text{ظنا } (١ + \text{س}^١) \times ٢ \text{س} = - \text{س} \text{ ع س قتا}^١ (١ + \text{س}^١)$$

ظننا (۱ + س)

ص = ۳ قا (۲ + π س) = ۳ قا ۲ س [۱۹]■

$$\therefore \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 3 \times 2 \text{ قا } 2 \text{ س } \times 2 \text{ قا } 2 \text{ س } \times 2 \text{ س } \times 2 \text{ س}$$

$$= ۱۲ \text{ قا } ۲ \text{ س ظا } ۲ \text{ س}$$

حل آخر: $\frac{وحد}{وحد} = 3 \times 2 \times (2 + \pi) \times (2 + \pi)$

س (س) ظا (س + π) \times ٢

$$= 12 \text{ قاً } (\pi + 2 \text{ س}) \text{ ظا } (\pi + 2 \text{ س})$$

$$\frac{\text{وس} - \text{فتاس ظئاس}}{\text{وس} + ۱۷۲} = \frac{\text{وس}}{[۲۰]}$$

■ [۲۱] $\frac{و}{س} = ۲ \text{ س ظتا } ۳ \text{ س} - ۳ \text{ س}^۲ \text{ قتا } ۳ \text{ س}$

حلول تمارين (١ - ٢) بالكتاب المدرسي

[١] $2س + 2ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٢] $2س + 2ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$1 = \frac{2س - 2ص}{2س - 2ص} = \frac{2س - 2ص}{2(س - ص)}$

[٣] $2ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$\frac{1}{2} =$

[٤] $2ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$\frac{3}{8} = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٥] $2س + 2ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$1 = \frac{2س - 2ص}{2س - 2ص} = \frac{2س - 2ص}{2(س - ص)}$

[٦] $2س - 8ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٧] $2س + 12ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2(س - ص) =$

[٨] $2س - (2س + 2ص) = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$1 = \frac{2س - 2ص}{2س - 2ص} = \frac{2س - 2ص}{2(س - ص)}$

[٩] $2س + 6ص = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$\frac{(2س + 2ص)^3}{(2س - 2ص)^2} = \frac{2س^3 + 6ص^3}{4س - 6ص} = \frac{2س^3 + 6ص^3}{2(2س - 3ص)}$

[١٠] $1 = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$\frac{2س - 2ص}{2س - 2ص} = \frac{2س - 2ص}{2(س - ص)}$

$\frac{2س - 2ص}{2س - 2ص} = \frac{2س - 2ص}{2(س - ص)}$

[٢٢] $-(2س + 2ص) \times 2 = (2س - 2ص) \times 2$

$-(2س + 2ص) \times 2 = (2س - 2ص) \times 2$

[٢٣] $2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٢٤] $2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٢٥] $2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٢٦] $2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[٢٧] $2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

(ب) $2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

$2س = \frac{2س}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2س}{2} = \frac{2ص}{2} = 1$

[۸] ۶ س = ۲ (س + $\frac{و}{س}$) \therefore ۳ س =

س + $\frac{و}{س}$ \therefore ۳ س = ۳ + $\frac{و}{س}$ + $\frac{و}{س}$

\therefore ۳ س = ۳ + $\frac{و}{س}$

[۹] ۲ س + ۲ ص $\frac{و}{س}$ = ۰ \therefore س + ص = ۰

\therefore ۱ + ص $\frac{و}{س}$ + $\frac{و}{س}$ = ۰ (ولكن $\frac{و}{س} = \frac{و}{س}$)

\therefore ۱ + ص $\frac{و}{س}$ + $\frac{و}{س}$ = ۰ \therefore ۱ + ص $\frac{و}{س}$

+ $\frac{و}{س}$ = ۰ \therefore ص + ۳ $\frac{و}{س}$ = ۰

\therefore ۴ + ص $\frac{و}{س}$ = ۰

[۱۰] ص = ۶ جا (۱ + س) \therefore ص = ۱۲

جتا (۱ + س) \therefore الیمن =

۱۲ - جتا (۱ + س) + ۱۲ جتا (۱ + س) = صفر

[۱۱] س ص + ص = جا س - جا س + جتا س \times

جتا س \therefore س ص + ص = جا س + جتا س

\therefore س ص + ص = جتا س \therefore س ص + ص + ص

ص = ۲ جا س \therefore س ص + ص + ص + ص

۲ جا س حتا س = ۰ س ص + ص + ص + ص = ۰

[۱۲] $\frac{و}{س}$ = س جتا س + جا س ، $\frac{و}{س}$ = س جا

س + جتا س + جتا س = س جا س + جتا س

$\frac{و}{س}$ = س جتا س = جا س - جا س = س جتا س

۳ - جا س \therefore الیمن = س (س جتا س - ۳ جا س) +

س (س جتا س + جا س) + ۲ (س جتا س + جا س) =

- س جتا س - ۳ س جا س + س جتا س + س جا س +

۲ س جا س = صفر

۲۸ = ۲۶ + ۲ + ۰ (۵)

بحل (۴) مع (۵) \therefore ۱ = ۲ ، ۱۱ = ۱۱ ومن (۲)

\therefore ۷۵ = ۱۲ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۲

\therefore ۷۵ = ۱۲ - ۱۲ - ۱۲ = ۱۹ - ۱۹ = ۱۹ - ۱۹

۱۱ - ۱۱ = ۱۹ - ۱۹ ، عندما س = ۲ عوض فی (۱)

\therefore ص = ۱۱ \times ۸ + ۱۱ \times ۴ + ۱۹ \times ۲ - ۲۳ = ۶۷

من (۲) \therefore ص = ۱۹ + ۱۱ \times ۲ + ۱۱ \times ۳ = ۴۴

[۲] ص = ۵ س - ۱۲ س

\therefore ص = ۲۰ س - ۲۴ س \therefore ص = ۶۰ س - ۲۴

[۳] ص = $\frac{۲(۱+س)}{۲(۱+س)} = \frac{۲(۱+س)}{۲(۱+س)}$

۲(۱+س) = ۲(۱+س) ، ص = ۱۲ - ۱۲

\therefore ص = ۱۲ (۳) = ۱۲ (۱+س) = ۱۲

[۴] ص = ۲ جتا (۲ - س) ، ص =

۴ جا (۲ - س) ، ص = ۸ جتا (۲ - س)

[۵] ص = ۳ جا (۳ - س) ، ص =

۹ جتا (۳ - س) ، ص = ۲۷ جا (۳ - س)

[۶] ص = جا س + جتا س = جتا س ،

ص = ۲ جا س \therefore ص = ۴ جتا س

[۷] ص = $\frac{۱}{۲} \times (۵ - س) = \frac{۱}{۲} \times (۵ - س)$

ص = $\frac{۱}{۲} \times (۵ - س) = \frac{۱}{۲} \times (۵ - س)$

ص = $\frac{۱}{۲} \times (۵ - س) = \frac{۱}{۲} \times (۵ - س)$

ص = $\frac{۱}{۲} \times (۵ - س) = \frac{۱}{۲} \times (۵ - س)$

$$(5) \text{ (جتا س - جاس) ص + (جاس + جتا س) } \frac{\text{وس}}{\text{وس}} =$$

$$2 \text{ جتا س} \times \text{جاس} - \text{جاس} \equiv \text{جاس} - 2 \text{ جاس} \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = -$$

$$\frac{\text{جاس} - (\text{جتا س} - \text{جاس}) \text{ ص}}{\text{جاس} + \text{جتا س}} \text{ عند س } \frac{\pi}{4} \therefore \text{ (جا ٩٠)}$$

$$+ \text{ (جتا ٩٠) ص} = \text{جتا ٩٠} \therefore \text{ ص} = 0 \therefore \text{ ميل المماس}$$

$$= \frac{\text{جا ١٨٠} - (\text{جتا ٩٠} - \text{جا ٩٠}) \times \text{ص}}{\text{جا ٩٠} + \text{جتا ٩٠}} = 0 \therefore \text{ معادلة المماس}$$

$$\text{هي: ص} = 0 \text{ ، معادلة العمودي هي: س } \frac{\pi}{4}$$

$$\text{[٤]} (٩) \text{ ص} = 1 \text{ ، س} = 1 \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = 1$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ عند } 1 = 1 \text{ يكون ميل}$$

$$\text{المماس} = \frac{1}{3} \text{ ، س} = 1 + 1 = 2 \text{ ، ص} = 1 \times 2 = 2$$

$$\text{عند النقطة (٢، ٥): معادلة المماس هي:}$$

$$\text{ص} - 2 = \frac{1}{3} (\text{س} - 2) \therefore \text{ ص} = 3 - 2 = 1 \therefore \text{ س} = 10$$

$$\text{أي: س} = 2 \text{ ، ص} = 3 - 2 = 1 \therefore \text{ معادلة العمودي هي:}$$

$$\text{ص} - 2 = \frac{3}{1} (\text{س} - 2) \text{ أي: س} = 3 + 2 = 5 \therefore \text{ ص} = 19$$

$$(ب) \text{ ص} = 1 \text{ ، س} = 1 \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = 1$$

$$= \frac{\text{قا} \theta}{\text{طا} \theta} = \frac{\text{قا} \theta}{\text{طا} \theta} \times \frac{1}{\text{جا} \theta} = \frac{\text{قا} \theta}{\text{جا} \theta} \text{ عند } \theta$$

$$\frac{\pi}{6} \therefore \text{ س} = 30 \text{ ، ص} = 30 \therefore \frac{1}{3\sqrt{3}} = 30$$

$$\text{عند النقطة } \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \text{ ميل المماس} = 30$$

$$\therefore \text{ معادلة المماس هي: ص} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - (\text{س} - \frac{1}{3\sqrt{3}})$$

$$\therefore \text{ ص} = 1 - 3\sqrt{3} \therefore \text{ س} = 1 - 3\sqrt{3}$$

$$\text{أي: س} = 3\sqrt{3} - 3 \therefore \text{ ص} = 3 \therefore \text{ معادلة العمودي هي}$$

$$\text{ص} = \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} (\text{س} - \frac{3\sqrt{3}}{3}) \therefore \text{ ص} = 6 \therefore \text{ س} = 3\sqrt{3}$$

$$= -3 + 3\sqrt{3} \therefore \text{ أي: س} = 3 - 6 \therefore \text{ ص} = 3\sqrt{3} - 3$$

$$(ب) \text{ ص} = 1 - 2 \text{ جاس} - \text{قاس ظا س} \text{ ، عند س } \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{ ميل المماس} = 2 - 60 - 60 \text{ ظا } 60 = 3\sqrt{3}$$

$$\text{ص} = 2 \text{ جتا } 90 - 60 = 1 \therefore \text{ عند النقطة } \left(1 - \frac{\pi}{3}, 1 \right)$$

$$\therefore \text{ معادلة المماس هي: ص} = 1 + 3\sqrt{3} (\text{س} - \frac{\pi}{3})$$

$$\text{معادلة العمودي هي: ص} = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} (\text{س} - \frac{\pi}{3})$$

$$\text{[٣]} (٩) \text{ س} = 2 \text{ ، ص} = 0 \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \text{ ميل المماس} = \frac{1}{3} \text{ عند النقطة (٤، ٦):}$$

$$\text{معادلة المماس هي: ص} = 6 + \frac{1}{3} (\text{س} - 4) \text{ أي:}$$

$$\text{ص} = 18 + 2 \text{ س} - 8 \text{ أي: س} = 5 \therefore \text{ ص} = 26$$

$$\therefore \text{ معادلة العمودي هي: ص} = 6 + \frac{3}{1} (\text{س} - 4) \text{ أي:}$$

$$\text{ص} = 12 + 3 \text{ س} - 12 \text{ أي: س} = 3 \therefore \text{ ص} = 0$$

$$(ب) \text{ س} = 5 \text{ ، ص} = 0 \therefore \text{ ميل المماس} = 0$$

$$\text{ص} = \frac{(5 + 2) - (0 + 5)}{5 - 0} = 1 \text{ عند النقطة (١، ١): ميل}$$

$$\text{المماس} = \frac{(5 - 2) - (0 - 5)}{2 - 0} = 1 \therefore \text{ معادلة المماس هي:}$$

$$\text{ص} = 1 + (\text{س} - 1) \text{ أي: س} = 2 \therefore \text{ ص} = 0$$

$$\text{معادلة العمودي هي: ص} = 1 + \text{س} = 1$$

$$\text{أي: س} = \text{ص} = 0$$

$$(ج) \text{ ص} = 2 \times \text{س} + (\text{س} + 1) \times 2 \therefore \text{ ص} = 0$$

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - 2}{\text{س} + 1} = 1 \text{ عند النقطة (١، ٢): ميل المماس}$$

$$= \frac{1 \times (1 - 2)}{(1 + 1)^2} = 1 \therefore \text{ معادلة المماس هي:}$$

$$\text{ص} = 2 - \text{س} = 3 \therefore \text{ أي: س} = 3 \therefore \text{ ص} = 0$$

$$\text{معادلة العمودي هي: ص} = 2 - (\text{س} + 1) = 0$$

$$\text{أي: س} = 1 \therefore \text{ ص} = 1$$

■ [5] النقطة (2, 4) ∈ المنحنى . تحقق معادلته

$$16 = 4 + 8 - 4 = 8 \quad \therefore 32 = 8 \quad \therefore 4 = 4$$

$$2 = 2 \quad \therefore 2 = 8 - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6 \quad \therefore \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{عند النقطة (2, 4) : ميل المماس} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{معادلة المماس هي : } 0 = 2 + 4$$

■ [6] 2 = 8 + ص ص' = 0 : عند النقطة

$$(2, 4) : \text{ميل المماس} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0} = \frac{1}{4} \quad \therefore \text{معادلة المماس}$$

$$\text{هي : } 2 = 2 + 4 - 4 = 2 \quad \therefore \frac{1}{4} = 2 - 4 = -2 \quad \therefore 4 - 8 = -4 = -2$$

$$+ 2 = 2 \quad \therefore 2 = 4 - 4 = 0 \quad \therefore \text{معادلة العمودي هي :}$$

$$2 = 2 \quad \therefore 4 = 2 - 4 = -2 \quad \therefore 2 = 6 - 4 = 2$$

$$\text{يفرض أن المماس يقطع محور السينات في } (0, 6)$$

$$(0, 10) \quad \therefore \text{يفرض أن العمودي يقطع محور السينات في } 6$$

$$(0, \frac{3}{4}) = (0, 0.75)$$

$$\therefore \text{P} = 10 - \frac{3}{4} = 9.75 \quad \therefore \text{الارتفاع} = 2$$

$$\therefore \text{مساحة } (\Delta \text{ P B ج}) = 2 \times 9.75 \times \frac{1}{2} = 9.75 \text{ وحدة مربعة}$$

■ [7] لإيجاد نقط تقاطع المنحنيين نضع ص' = ص

$$2 = 2 - 4 = -2 \quad \therefore (1 - 4) - 2 = -5$$

$$2 = 2 + 4 - 4 = 2 \quad \therefore 2 - 4 = -2 \quad \therefore 1 - 4 = -3$$

$$2 = 2 \quad \therefore 2 = 2 - 4 = -2 \quad \therefore 1 = 1 - 4 = -3 \quad \therefore 1 = 1$$

$$\therefore \text{نقطين التقاطع هما : } (1, 0) \text{ و } (1, 0)$$

$$\text{المنحنى الأول : } 2 = 2 + (1 - 4) = -1 \quad \therefore 0 = 0$$

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{المنحنى الثاني : } 2 = 2 + (1 + 4) = 7 \quad \therefore 0 = 0$$

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore \text{عند النقطة (1, 0) : } 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad \therefore 1 = 1 \times 1 = 1 \quad \therefore 1 = 1 \quad \therefore \text{المنحنيان يتقاطعان على التعامد}$$

$$\text{معادلة المماس للمنحنى الأول : } 1 = 1 - 4 = -3 \quad \therefore (0 - 3)$$

$$\text{أي : } 1 = 1 - 4 = -3 \quad \therefore \text{معادلة المماس للمنحنى الثاني :}$$

$$1 = 1 - 4 = -3 \quad \therefore \text{أي : } 1 = 1 - 4 = -3$$

$$\text{عند النقطة (1, 0) : } 1 = 1 - 4 = -3$$

$$\therefore \text{معادلة المماس للمنحنى الأول : } 1 = 1 - 4 = -3$$

$$\text{أي : } 1 = 1 - 4 = -3 \quad \therefore \text{معادلة المماس للمنحنى الثاني :}$$

$$1 = 1 - 4 = -3 \quad \therefore 1 = 1 - 4 = -3$$

حلول تمارين (1 - 5) بالكتاب المدرسي

$$\text{■ [1] } 2 = 2 \quad \therefore \frac{4}{2} \times \pi = \pi \quad \therefore \frac{4}{2} = 2$$

$$8 = 8$$

$$\text{■ [2] عند } 8 = 8 \quad \therefore 8 = 8 \quad \therefore 8 = 8$$

$$3 = 3 \quad \therefore \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore 3 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\text{■ [3] عند } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 1 \quad \therefore 1 = 1$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore \text{وحدة رث}$$

$$\text{■ [4] } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \therefore \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{■ [5] } 2 = 2 + 4 - 4 = 2 \quad \therefore 2 = 2 + 4 - 4 = 2$$

$$0 = 4 - 4 = 0 \quad \therefore 4 - 4 = 0$$

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad \therefore \text{وحدة رث}$$

$$\text{■ [6] } 2 = 2 \quad \therefore \frac{4}{2} \times \pi = \pi \quad \therefore \frac{4}{2} = 2$$

$$8 = 8 \quad \therefore 8 = 8 \quad \therefore 8 = 8$$

$$\text{نقطة = نقطة + نقطة = 4 \times 0 = 0 \quad \therefore \text{من (1)}$$

$$\therefore \frac{4}{2} \times \pi = \pi \quad \therefore 4 \times \pi = \pi \quad \therefore 4 = 1$$

$$\text{■ [7] } 2 = 2 \quad \therefore \frac{4}{2} \times \pi = \pi \quad \therefore \frac{4}{2} = 2$$

$$3 = 3 \quad \therefore 3 = 3 \quad \therefore 3 = 3$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$



لاحي

10. (پ) ص (۲) = (۵ + س) $\frac{1}{2}$ \therefore

ص' = $\frac{1}{2} - (۵ + س) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (۵ + س)$

ص'' = $\frac{1}{2} - (۵ + س) \times \frac{2}{2} = \frac{1}{2} - (۵ + س)$

ص (۳) = $\frac{3}{2} - (۵ + س) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - (۵ + س)$

المقدار = $\frac{3}{2} - (۵ + س) \times (۵ + س) = \frac{3}{2} - (۵ + س)$

ص = $\frac{3}{2} - (۵ + س) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - (۵ + س)$

(ب) ص + س = $\frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ج) $\frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

س = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

جتا پ = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

11. (پ) س = $\frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

ص = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

معادلة المماس هي: ص = $\frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

ص = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

معادلة العمودي هي: ص = $\frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

ص = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ب) جتا پ = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

ص = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ظا ۲ س + قا ۲ س) = (قا ۲ س - ۱ + قا ۲ س)

(س ۲) = (قا ۲ س - ۱ + قا ۲ س)

7. (پ) جتا ۰ = $\frac{نوه}{نوه + س}$

\therefore س جتا ۰ + نوه جتا ۰ = نوه \therefore س = $\frac{نوه - نوه جتا ۰}{جتا ۰}$

= نوه قتا ۰ - نوه = نوه (قتا ۰ - ۱)

(ب) $\frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا ۰ = $\frac{وس}{وس}$ جتا ۰

- نوه قتا ۳۰ = $\frac{وس}{وس}$ جتا ۰ = $\frac{وس}{وس}$ جتا ۰

8. (پ) س = $\frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ب) س = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ج) س = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

\therefore س = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(د) س = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ه) ص = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(و) جتا پ = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

9. (پ) ص = $\frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

ع = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

(ب) ص = $\frac{وس}{وس} + \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

$\therefore \frac{وس}{وس} = \frac{وس}{وس}$ جتا پ = ص

[٢٤] $\pi = \text{ح} = \pi \text{ نوه} \text{ ع} = \pi (١٢) \times \text{ع} \therefore$

$\frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \pi ١٤٤ = \frac{\text{ح}}{\text{نوه}} \pi ١٤٤ \therefore \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \pi ١٤٤ = ٢ - \therefore$

$\frac{١ - \text{ع}}{\pi ٧٢} = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \therefore$

[٢٥] $\frac{\text{ص}}{١٥٠} = \theta \therefore \text{قا} = \frac{\theta}{\text{نوه}} \times \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore$

$\frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \times \frac{١}{\theta \text{ قا} ١٥٠} = \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore$ (١) ، عندما

$\text{ص} = ١٥٠ \text{ متر} \therefore \text{قا} = \theta = ٤٥ \text{ م} \therefore$

ومن (١) $\therefore \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} = \frac{١}{٢ \times ١٥٠} \times ٤٢ = ١٤ \therefore$

[٢٦] $\frac{\text{ص}}{\theta} = \text{ظا} \therefore \frac{١}{\theta} \times \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = \text{قا} = \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore$

$\frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \times \frac{١}{\theta \text{ قا} ٥} = \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore$ (١) ، عند ب = ٥ متر

$\therefore \text{قا} = \theta = ٤٥ \text{ م} \therefore$

ومن (١) $\therefore \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} = \frac{١}{٢ \times ٥} \times (١٠ -) = ١ - \therefore$

[٢٧] $\frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = ٣ \text{ س} \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} + ٢ \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore$ ، عند س = ٣ \therefore

$\frac{١}{١٤} = \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = ٢٨ \therefore \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} + ٢٧ \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = ٢ \therefore$

وحدة/ث ، $\therefore \frac{١}{٢} \times ٦ \times \text{س} = ٣ \therefore$

$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \times ٣ = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \times ٣ = \frac{٣}{١٤} = \frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة/ث

اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة الاولى

[١] $\text{د} (س) = - \text{قتا} \text{ س} \therefore \text{د} (س) = - ٢ \text{ قتا س} \times$

(- قتا س ظنا س) $\therefore \text{د} (س) = ٢ \text{ قتا} \text{ س} \text{ ظنا س}$

$\therefore \text{د} (\frac{\pi}{٤}) = ٢ \text{ قتا} ٤٥ \text{ ظنا} ٤٥ = ١ \times ٢ \times ٢ = ٤$

[٢] $\frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = - ٢ \text{ س} \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore$ ، عند النقطة

(- ٣ ، ٤) $\therefore \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣ + ٦} = \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore$

$\therefore \frac{١}{٤} = \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore \frac{١}{٣} \times (٣ -) = - ٤ \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \therefore$

[٣] $\frac{١}{٤} = \text{ميل العمودي} \therefore$ ميل المماس = ٤

، عند النقطة (١، ١) $\therefore \text{د} (١) = ٤$

$\therefore ٢ = ٢٤٠ + ١٦ - ١٦ = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \therefore ٢٣ - ١٦ + ٢٤٠ = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}}$

عندما $\text{ع} = ٤ \therefore \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} = ١٦ - ٤ \times ٦ = - ٨ \text{ سم}^٢/ث$ ،

تتوقف المساحة عن التغير عندما $\frac{\text{ع}}{\text{نوه}} = \text{صفر}$

$\therefore ١٦ - ١٦ = ٠ = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \therefore$ وتكون المساحة عندئذ

$\therefore ٢ = ٢٤٠ + ١٦ - \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \times ١٦ = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \times ٣ - \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \times ١٦ = ٢ \text{ سم}^٢$

[٢٠] $\text{ص} = \text{ف جتا} \theta \therefore \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = - \text{ف جا} \theta \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore$

$\text{ك} = - \text{ف جا} \theta \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore \frac{\text{ك}}{\theta \text{ جا} \theta} = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \therefore$ (١) ،

$\text{س} = \text{ف جا} \theta \therefore \frac{\text{س}}{\text{نوه}} = \text{ف جتا} \theta \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore$ ، من (١) \therefore

$\frac{\text{س}}{\text{نوه}} = \text{ف جتا} \theta \times \frac{\text{ك}}{\theta \text{ جا} \theta} = \text{ك ظنا} \theta = \frac{٣}{٤} \text{ ك وحدة/ث}$

[٢١] \therefore الهرم رباعي منتظم \therefore قاعدته مربع ، نفرض

طول ضلع القاعدة = ل \therefore ارتفاعه = ل ، \therefore حجم الهرم

$= \frac{١}{٣} \text{ مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} \therefore \text{ح} = \frac{١}{٣} \text{ ل} \therefore$

$\frac{\text{ح}}{\text{ل}} = \frac{\text{ول}}{\text{نوه}} \therefore \frac{١}{١٠٠} \times \text{ل} = ١ \therefore \text{ل} = ١٠٠ \therefore$

$\therefore \text{ل} = ١٠ \text{ سم}$

[٢٢] $\text{س} + \text{ص} = \text{ع} (٢، ٦) \therefore$ (١)

$\text{س} \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} + \text{ص} \frac{\text{س}}{\text{نوه}} = ٠ \therefore$ (٢) ، عندما س = ١ م

ومن (١) $\therefore \text{ص} = ٢، ٤ \text{ متر} \therefore$ ومن (٢)

$١ \times \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} + ٢، ٤ \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = ٠ \therefore \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} = - \frac{٥}{٣} \text{ متر/ث} \therefore$

$\text{س} = ٢، ٦ \text{ جتا} \theta \therefore \frac{\text{س}}{\text{نوه}} = - \frac{\text{ص}}{\text{نوه}} \text{ جا} \theta \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore$

$\therefore - ٤ = \frac{\text{ع}}{\text{نوه}} \times \frac{٢، ٦}{٢، ٦} \times \frac{\theta}{\text{نوه}} \therefore \frac{\theta}{\text{نوه}} = - \frac{٥}{٣} \text{ د/ث}$

[٢٣] \therefore البعد الأول في أي لحظة = ٣ + ١٢ ، البعد الثاني

في أي لحظة = ٤ + ١٢ ، البعد الثالث في أي لحظة = ٣ - ١٢

$\therefore \text{ح} = (١٢ + ٣)(١٢ + ٤)(١٢ - ٣) = (١٢ + ١١ + ١٢ - ٩ - ١٢ + ٣ - ١٢) = ٣٧٦$

$\therefore \frac{\text{ح}}{\text{نوه}} = ٩٦ - ١٨ - ١٨ = ٦٠ \text{ سم}^٣/ث$ ، عند $\text{ع} = ٢$

$\therefore \frac{\text{ح}}{\text{نوه}} = ٩٦ - ٣٦ - ٧٢ = - ١٢ \text{ سم}^٣/ث$

[4] $\frac{وس}{ص} = 6$ س . عند النقطة (1, 2) ميل

المماس = 4 : معادلة المماس هي :

ص + 2 = 6 (س - 1) : ص = 6 - س - 8 ، النقطة (8, 0) تحققه : المماس بر بالنقطة (8, 0) .

[5] $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س : $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = \frac{1}{1} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = \frac{1}{1} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = \frac{1}{1} = 1$ س

[6] $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

ميل المماس = $\frac{1}{3} = \frac{1}{3 \times 3}$: نقطة التماس هي (36, -36)

معادلة المماس هي : $(16, 0) = (8\sqrt{2} - 6\sqrt{2}, 0)$: معادلة المماس هي :

ص - 16 = $\frac{1}{3}$ س أى : س - 3 - ص = 48 = 0

[7] $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

[8] $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

[9] (پ) $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

عند س = $\frac{\pi}{4}$: ميل المماس = - قتا' س - 2 قاس' س - 2 قاس' س - 2 قاس' س

ظا 45 = 6 : ميل العمودى = $\frac{1}{6}$ ، ص = 4 + 6

ظنا 45 - 45 قاس' س = 3 : معادلة العمودى هي :

ص - 3 = $\frac{1}{6}$ (س - $\frac{\pi}{4}$) أى : 6 ص - 18 = س - $\frac{\pi}{4}$

أى : س - 6 ص + 18 = $\frac{\pi}{4}$ = 0

(ب) مساحة المثلث المنتظم الذى طول ضلعه س = $\frac{1}{2} \times 8 \times 8$

س' ظنا $\frac{\pi}{8}$: م = 2 س' ظنا 22,5 : م = 2 س' ظنا 22,5

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

19,3 سم' ث

[10] $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

عندما 0 = 6 : ص = 3 م

س = 20 م + 3 م' س = $\frac{وس}{ص}$ = 0

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

حلول اختبارات كتاب لامى على الوحدة الاولى

الإختبار الأول

السؤال الأول : (پ) $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

ك = 4 ، س = 2 ص - 8 = 0 : $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

ميل المماس = صفر : معادلة المماس هي :

ص + 2 = 0

(ب) $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

جا 20 = $\frac{وس}{ص}$: $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

جتا 20 = $\frac{وس}{ص}$: $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

لكن $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

$\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س ، $\frac{وس}{ص} = 1$ س

أن : قياس الزاوية يتناقص بمعدل $\frac{1}{y}$ زاوية نصف قطرية/ث

$$(2) \text{ جتا ص} - \text{س جا ص} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \text{جتا ص} \frac{\text{وس}}{\text{وس}} - \text{ص جا}$$

$$\text{س} = 0 \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{\text{ص جا ص} - \text{جتا ص}}{\text{جتا ص} - \text{س جا ص}}$$

$$(ب) (1) \frac{2}{1+\sqrt{4}} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}}, \frac{3}{2-\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}}$$

$$\therefore \frac{8}{9} = \frac{\sqrt{4}}{3 \times 9\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{3}\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{1+\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}}$$

$$(2) \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{جا ص} + \text{س جتا ص}, \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{جتا ص} + \text{ص جا}$$

$$\text{س} - \text{س جا ص} = 2 \text{ جتا ص} - \text{س جا ص}, \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{جا ص} - \text{جا ص} - \text{س جتا ص} = 3 - \text{جا ص} - \text{س جتا ص}$$

$$\text{الأيمن} = \text{س} (-3 \text{ جا ص} - \text{س جتا ص}) + \text{س} (\text{جا ص} + \text{س جتا ص})$$

$$\text{جتا ص} (\text{س} + 2 \text{ س جا ص} - 3 \text{ س جا ص} - \text{س جتا ص} + \text{س جتا ص})$$

$$\text{جا ص} + \text{س جتا ص} + 2 \text{ س جا ص} = \text{صفر}$$

$$\text{السؤال الثاني: (P) (1) } 2 = \frac{\text{وس}}{\text{وس}} \text{ قتا } (2 + \text{س} + 5) \times -$$

$$\text{ظنا } (2 + \text{س} + 5) \text{ قتا } (2 + \text{س} + 5) \times 0 = 10 - \text{قتا } (5)$$

$$(2 + \text{س} + 5) \text{ ظنا } (2 + \text{س} + 5)$$

$$(2) \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = 2 \text{ جتا ص} - \text{جا } 2 \text{ ص} \times \frac{\text{وس}}{\text{وس}} \text{ جا } 2$$

$$\text{س} = \text{جتا ص} \text{ جتا } 2 \text{ ص} - \frac{\text{وس}}{\text{وس}} \text{ جا ص} \text{ جا } 2 \text{ ص} \therefore$$

$$\frac{\text{وس}}{\text{وس}} = 2 + 2 \text{ جا ص} \text{ جا } 2 \text{ ص} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}} \text{ جتا ص} \text{ جتا } 2 \text{ ص} \therefore$$

$$\frac{\text{جتا ص} \text{ جتا } 2 \text{ ص}}{\text{وس}} = \frac{2 + 2 \text{ جا ص} \text{ جا } 2 \text{ ص}}{\text{وس}}$$

$$(ب) (1) \frac{\text{وس}}{\theta} = 2 \text{ قا } \theta \times \theta \text{ قا } \theta \text{ ظا } \theta = 2 \text{ قا } \theta \text{ ظا } \theta$$

$$\frac{\text{وس}}{\theta} = 2 \text{ قا } \theta$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{(130-)\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{\theta \text{ قا } \theta}{\theta \text{ قا } \theta \text{ ظا } \theta} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}}$$

$$(2) \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{قاس ظا ص}, \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{قاس ظا ص} \times \text{ظا ص}$$

$$+ \text{قا } 3 \text{ س قاس} = \text{قاس ظا } 3 \text{ س} + \text{قا } 3 \text{ س}$$

$$\text{الأيمن} = \text{قاس} (\text{قاس ظا } 3 \text{ س} + \text{قا } 3 \text{ س}) + (\text{قاس ظا ص})$$

$$= \text{قا } 3 \text{ س ظا } 3 \text{ س} + \text{قا } 3 \text{ س} + \text{قا } 3 \text{ س} = 2 \text{ قا } 3 \text{ س ظا } 3 \text{ س}$$

$$\text{س} + \text{قا } 3 \text{ س} = 2 \text{ قا } 3 \text{ س} (\text{قا } 3 \text{ س} - 1) + \text{قا } 3 \text{ س} = 3 \text{ قا } 3 \text{ س}$$

$$- 2 \text{ قا } 3 \text{ س} = \text{قا } 3 \text{ س} (3 \text{ قا } 3 \text{ س} - 2) = \text{الأيسر}$$

حل الاختبار الثاني

$$\text{السؤال الأول: (P) (2) } [1 + (-1)] = 8 \therefore \text{له} = 8$$

$$\therefore \text{ص} = (1 + \text{س}) = 8 \therefore 2 \text{ ص} = \frac{\text{وس}}{\text{وس}} (1 + \text{س}) + 2$$

$$\text{س ص} = 0 \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \therefore \text{ميل المماس} = \frac{2 \times (1-) -}{2(1-) + 1}$$

$$\therefore \text{معادلة المماس هي: ص} - 2 = 1 (\text{س} + 1)$$

$$\text{أي: س} - 2 = 3$$

$$(ب) \text{ح} = \frac{4}{3} \pi \text{ نوه } 3 \therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{4}{3} \pi \text{ نوه } 3$$

$$\therefore 8 \pi = 16 \times \frac{\pi}{16} \text{ نوه } 3 \therefore \frac{1}{8} = \frac{\text{نوه } 3}{\text{وس}}$$

$$\text{السؤال الثاني: (P) (1) } 2 = \frac{\text{وس}}{\text{وس}} (2 - 7 \text{ ظنا ص}) \times 3$$

$$\text{قتا } 3 \text{ س} = 6 (2 - 7 \text{ ظنا ص}) \text{ قتا } 3 \text{ س}$$

إجابات الوحدة الثانية:

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

المجموعة الأولى :

مسائل على العدد التبييري هـ

أكمل :

[١] هـ $\frac{1}{2}$ هـ $\frac{1}{2}$

[٣] هـ $\frac{1}{4}$ هـ $\frac{1}{4}$

[٥] هـ $\frac{1}{8}$ هـ $\frac{1}{8}$

أختر الاجابة الصحيحة :

[٦] هـ $\frac{1}{16}$ هـ $\frac{1}{16}$

[٨] هـ بوضع $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

عندما $\frac{1}{3} \rightarrow 0$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[٩] هـ بوضع $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

عندما $\frac{1}{3} \rightarrow 0$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٠] هـ المقدار $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١١] هـ بوضع $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

فإن $\frac{1}{3} \rightarrow 0$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٢] هـ بوضع $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

فإن $\frac{1}{3} \rightarrow 0$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٣] هـ بوضع $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

عندما $\frac{1}{3} \rightarrow 0$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٤] هـ بوضع $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

عندما $\frac{1}{3} \rightarrow 0$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٥] هـ المقدار $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٦] هـ المقدار $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٧] هـ المقدار $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

[١٨] هـ المقدار $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$ هـ $\frac{1}{3}$

$$[٢٦] \quad \text{المقدار} = \text{نها} = \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right) \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right)$$

$$= \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right) \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right) = \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right) \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right)$$

$$= \text{نها} \left(\frac{1+n}{n} \right) = 1$$

المجموعة الثانية :

مسائل على مشتقة الدوال الأسية

$$[١] \quad \frac{ع}{س} = ٨ \times ٢ \times ٣ \times ٤ + ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$$

$$\text{نها} = ٢ \times (٨ \times ٣ \times ٤ + ٥ \times ٦ \times ٧) = ٢ \times (٩٦ + ٢١٠) = ٦١٢$$

$$[٢] \quad \frac{ع}{س} = ٨ \times ٢ \times ٣ \times ٤ + ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$$

$$[٣] \quad \frac{ع}{س} = ٥ - ٥ \text{ جتا } س . \text{ هـ جاس}$$

$$[٤] \quad \text{باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى } س$$

$$\text{هـ س} + \text{هـ س} = \frac{ع}{س} = \text{هـ س} + \text{هـ س} = \left(\frac{ع}{س} + ١ \right) \times \text{هـ س}$$

$$\text{هـ س} - \frac{ع}{س} = \text{هـ س} + \text{هـ س} = \text{هـ س} - \text{هـ س} = ٠$$

$$\frac{ع}{س} = \frac{٥ \text{ هـ س} - \text{هـ س}}{٥ \text{ هـ س} - \text{هـ س}}$$

$$[٥] \quad \frac{ع}{س} = \frac{\text{هـ س} - (١ - \text{هـ س})}{(١ - \text{هـ س})} = \frac{\text{هـ س} - ١ + \text{هـ س}}{(١ - \text{هـ س})} = \frac{٢ \text{ هـ س} - ١}{(١ - \text{هـ س})}$$

أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$[٦] \quad \frac{١}{٥} = \left[\frac{١}{٥} \text{ هـ س} \right] \text{وس} \frac{١}{٥} \text{ هـ س} + \text{ث}$$

$$[٧] \quad \text{هـ} = \frac{١}{٢} + \text{س} - \left(\frac{١}{٢} - \text{هـ} \right) \text{س}$$

$$\text{هـ} = \frac{١}{٢} - \text{س} - \left(\frac{١}{٢} - \text{هـ} \right) \text{س} = \text{صفر}$$

$$[٨] \quad \text{ص} = ٢ \text{ س هـ س}$$

$$\text{ص} = ٢ \text{ س هـ س} + ٤ \text{ س هـ س}$$

$$\text{المقدار} = \text{س هـ س} + ٤ \text{ س هـ س} - \text{س هـ س} = ٤ \text{ س هـ س}$$

$$\text{هـ س} = ٤ + \text{صفر} = ٤$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} - \left(\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \right) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

$$[١٩] \quad \text{بوضع ص} = ٣ \text{ ظا } س \therefore \text{ظا } س = \frac{ص}{٣}$$

$$\therefore \text{ظنا } س = \frac{٣}{ص} , \text{ عندما } س \rightarrow ٠ \text{ فإن } ص \rightarrow ٠$$

$$\therefore \text{المقدار} = \text{نها} = (١ + ص) \left(\frac{٣}{ص} \right) = \frac{٣}{ص}$$

مسائل على النهايات واللوغاريتم الطبيعي :

$$[٢٠] \quad \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\text{نها} (١ + س)}{س} \times \frac{\text{نها} (١ - س)}{١ - س}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$[٢١] \quad \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\text{نها} (١ + س)}{س} \times ٨ \times \frac{\text{نها} (١ - س)}{١ - س}$$

$$\text{نها} = \frac{١}{١ - س} \times ١ \times ٢ = \frac{٢}{١ - س}$$

$$[٢٢] \quad \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\text{نها} (١ - س)}{س} \times \frac{\text{نها} (١ + س)}{١ + س}$$

$$٤ = ١ \times ٤ = ٤$$

$$[٢٣] \quad \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\text{نها} (١ - س)}{س} \times \frac{١}{٢} \times \frac{\text{نها} (١ + س)}{١ + س}$$

$$\frac{٣}{٢} = ١ \times \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$$

$$[٢٤] \quad \text{بوضع ص} = ١ - س , \text{ عند } س \rightarrow ٠$$

$$\text{ص} \rightarrow ٠ \therefore ١ - س = ١ \therefore \text{س} = ١ - \text{ص} \therefore \text{نها} = ١$$

$$(١ + ص) = \text{نها} = \frac{\text{نها} (١ + ص)}{\text{نها} (١ + ص)} = ١$$

$$\text{نها} = \frac{\text{نها} (١ + ص)}{\text{نها} (١ + ص)} \times \frac{\text{نها} (١ - ص)}{١ - ص} = \frac{\text{نها} (١ - ص)}{١ - ص}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{نها} (١ - ص)}{١ - ص} = \frac{\text{نها} (١ - ص)}{١ - ص} = ١$$

$$\frac{\text{نها} (١ - ص)}{١ - ص} = \frac{\text{نها} (١ - ص)}{١ - ص} = ١$$

$$[٢٥] \quad \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\text{نها} (١ - س)}{س} = \frac{١ - س}{س} = \frac{١}{س} - ١$$

[٩] ص = ٦ هـ س^٢

∴ المقدار = ٣٠ هـ س^٢ ÷ ٦ هـ س^٢ = ٥

[١٠] ص = ٦ هـ س^٢ × ٥ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

المقدار = $\frac{٥ هـ س^٢ \times ٦ هـ س^٢}{٥ هـ س^٢ \times ٦ هـ س^٢} = ١$

[١١] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

∴ س = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ ص + ٣ ص = ٥ ص

∴ س = ٢ ص - ٣ ص = -١ ص

[١٢] ٧ × ٢ جتا س = ١ - ٢ جتا س

١٤ جتا س = ١ - ٢ جتا س

[١٣] مشتقة الثابت = صفر

[١٤] بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ س = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

∴ $\frac{٢ هـ س^٢}{٣ هـ س^٢ + ٢ هـ س^٢} = ١$

[١٥] ص = ٣ هـ س^٢

[١٦] ص = ٣ هـ س^٢ + ٢ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٣ هـ س^٢ + ٢ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[١٧] ص = ٢ جتا س = ١ - ٢ جتا س

[١٨] د (س) = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

د (س) = ١ + ٢ هـ س^٢

[١٩] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢٠] د (س) = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٥ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢١] المقدار = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢٢] ص = ٧ هـ س^٢

[٢٣] ص = ٢ هـ س^٢

[٢٤] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢٥] ص = ٢ هـ س^٢

[٢٦] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ هـ س^٢ = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢٧] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ هـ س^٢ = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢٨] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٢٩] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ هـ س^٢ = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٣٠] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٣١] ص = ٧ هـ س^٢

[٣٢] ص = ٣ هـ س^٢

[٣٣] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ هـ س^٢ = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

[٣٤] ص = ٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢ = ٥ هـ س^٢

$\frac{٢ هـ س^٢ + ٣ هـ س^٢}{٥ هـ س^٢} = ١$

المجموعة الثالثة :

مسائل على المشتقات العليا

أكمل ما يأتي :

[1] $2 = \frac{1}{s} \times \frac{2}{s} = \frac{2}{s^2}$ لوهر من

[2] $3 = \frac{1}{s} \times \frac{3}{s} = \frac{3}{s^2}$ (لوهر من) $\frac{3}{s}$

[3] $\frac{1}{s} =$

[4] $\frac{1}{1+s} =$

[5] $\frac{s}{s^2+4} =$ ص

[6] $\frac{3s^2-2}{s^2+3s-2} =$

[7] $\frac{1-s^2}{s^2-3s-7} = \frac{3-s^2}{s^2-3s-7} \times \frac{1}{3} =$

[8] $\frac{s}{s^2-2} = \frac{(s^2-2)(s+2)}{s^2-2} = \frac{s^3-4}{s^2-2}$

[9] $\frac{1-s^2}{1+s-2} =$

[10] $\frac{(3-s) \times 1 - (1+s) \times 1}{(1+s)^2} = \frac{2-2s}{(1+s)^2} = \frac{2(1-s)}{(1+s)^2}$

$\frac{4}{(3-s)(1+s)} = \frac{1+s}{3-s} \times \frac{3-s-1+s}{(1+s)^2} =$

المقدار $\frac{4}{(3-s)(1+s)} = (3-s)(1+s) \times \frac{4}{(3-s)(1+s)} = 4$

[11] $\frac{s^2-2}{1+s^2} = \frac{s^2-2}{1+s^2} = \frac{s^2-2}{1+s^2}$

$\frac{(1+s^2-2)s^2-2}{(1+s^2)^2} = \frac{(s^2-1)s^2-2}{(1+s^2)^2} = \frac{s^4-s^2-2}{(1+s^2)^2}$

$\frac{s^2(1-s)-2}{(1+s^2)^2} =$

[35] $ص = \frac{1}{1+s^2}$

ص $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

$\frac{1}{1+s^2} =$

[36] $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ (لوهر من) $\frac{1}{s}$

[37] $ص = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

[38] $\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}$ لوهر من $\frac{1}{s^2}$

[39] $ص = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

ص $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

[40] $ص = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

ص $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

[41] $\pi = \pi \times \frac{1}{s} = \frac{\pi}{s}$ لوهر من π

[42] $\pi = \pi \times \frac{1}{s} = \frac{\pi}{s}$ لوهر من π

ص $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

$\pi = \pi \times \frac{1}{s} = \frac{\pi}{s}$ لوهر من π

[43] (أولاً) $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ صفر

(ثانياً) $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ صفر

$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

ومنها $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

[44] $\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ لوهر من $\frac{1}{s}$

$$[33] \text{ لود ص} = \text{ظاس لود جاس} \therefore \frac{1}{\text{ص}} \times \frac{1}{\text{وس}} =$$

$$\text{ظاس} \times \frac{1}{\text{جاس}} \times \text{جتاس} + \text{لود جاس} \times \text{قا}^2 \text{س}$$

$$= 1 + \text{قا}^2 \text{س لود جاس}$$

$$\therefore \frac{\text{وس}}{\text{ص}} = (\text{جاس}) \text{ظاس} (1 + \text{قا}^2 \text{س لود جاس})$$

$$[34] \text{ لود ص} = \text{س لود جاس}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{س} \times \frac{1}{\text{جاس}} \times \text{جتاس} + \text{لود جاس} \times 1$$

$$\therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = (\text{جاس}) \text{س} (\text{س ظتاس} + \text{لود جاس})$$

$$[35] \text{ ص} = \text{س}^2 \text{س} \therefore \text{لود ص} = \text{س}^2 \text{س لود س}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{س}^2 \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لود س}$$

$$\therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{س}^2 \text{س} (\text{س} + 1 \text{ لود س})$$

$$[36] \text{ لود}^2 \text{ ص} = \text{س لود}^2 \text{ ص} + \text{لود}^2 \text{ ص}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} \times \frac{1}{\text{وس}} \times \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{لود}^2 \text{ ص} + \frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \frac{\text{لود}^2 \text{ ص}}{\text{وس}}$$

$$\therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = (\text{لود}^2 \text{ ص} - \frac{\text{وس}}{\text{وس}}) = \text{لود}^2 \text{ ص} + \frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \frac{\text{لود}^2 \text{ ص}}{\text{وس}}$$

$$\therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{\text{لود}^2 \text{ ص} + \frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \frac{\text{لود}^2 \text{ ص}}{\text{وس}}}{\text{لود}^2 \text{ ص} - \frac{\text{وس}}{\text{وس}}} \text{ بالضرب } \times 6 \text{ ص}$$

$$\therefore \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{6 \text{ ص لود}^2 \text{ ص} + 3 \text{ ص}^2 \text{س} + 3 \text{ ص}^2 \text{س}}{6 \text{ ص لود}^2 \text{ ص} - 12 \text{ ص}^2 \text{س}}$$

$$[37] \text{ ص} = \text{س}^2 \text{س}^2 \text{س} \text{ لود س} + \text{س}^3 \text{س} \times \frac{\text{س}^3}{\text{س}}$$

$$= \text{س}^3 \text{س}^2 (\text{لود س} + 1)$$

$$[38] \text{ ص} = \text{س}^2 \text{لود}^2 \text{ (س}^2 \text{ + 7 س)}$$

$$\text{ص} = \frac{14 \text{ س}}{3 + 7 \text{ س}^2} \times 2 = \frac{28 \text{ س}}{3 + 7 \text{ س}^2}$$

$$[39] \text{ ص} = \text{س}^2 \text{لود س} + (\text{لود س})^2$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} + \frac{\text{س}^2 \text{لود س}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} + \text{س} (\text{لود س} + 1)$$

$$[40] \text{ ص} = \frac{1}{3} \text{لود}^2 \text{ (س}^2 \text{ + 6 س + 6)}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7 + 6 \text{ س} + 6} = \frac{2}{7 + 6 \text{ س} + 6}$$

$$[41] \text{ ص} = \frac{1}{2} \text{لود}^2 \text{ (س}^2 \text{ + 4 س + 4)}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{س}^2 \text{ (س}^2 \text{ - 4 س + 4) + 2 س (س}^2 \text{ + 4 س + 4) + (س}^2 \text{ - 4 س + 4)}}{(2 \text{ س}^2 \text{ - 4 س + 4)}^2}$$

$$= \frac{\text{س}^8 - 8 \text{ س}^6 + 8 \text{ س}^4 + 2 \text{ س}^6 + 8 \text{ س}^4 + 2 \text{ س}^2 - 8 \text{ س}^2 - 16 \text{ س}^2}{(2 \text{ س}^2 \text{ - 4 س + 4)}^2}$$

$$[42] \text{ ص} = \text{لود س}^{-1} + (\text{لود س})^{-1}$$

$$= - \text{لود س} + (\text{لود س})^{-1} \therefore \text{ص} = - \frac{1}{\text{س}} -$$

$$(\text{لود س})^{-2} \therefore \frac{1}{\text{س}} = - \frac{1}{\text{س}} (1 + \frac{1}{(2 \text{ س}^2)})$$

$$[43] \text{ ص} = \frac{\text{قا}^2 \text{س}^2}{\text{ظاس}^2} = \frac{1 \times 2}{\frac{\text{جتاس}^2 \text{س}^2}{\text{جتاس}^2}} = \frac{2}{\text{جتاس}^2 \text{س}^2}$$

$$= \frac{2}{\text{جتاس}^2 \text{س}^2} = \frac{4}{\text{جتاس}^2 \text{س}^2}$$

$$[44] \text{ ص} = \frac{1}{\text{س}} - \text{جا} (\text{لود}^2 \text{ س})$$

$$[45] \text{ ص} = \frac{\text{س}^2 \text{قا}^2 \text{س}^2}{\text{ظاس}^2} = \frac{1 \times 2 -}{\frac{\text{جتاس}^2 \text{س}^2}{\text{جتاس}^2}} = \frac{2 -}{\text{جتاس}^2 \text{س}^2}$$

$$= \frac{2 -}{\text{جتاس}^2 \text{س}^2} = \frac{4 -}{\text{جتاس}^2 \text{س}^2}$$

$$[46] \text{ ص} = \frac{\text{قا}^3 \text{س}^3 \text{ظاس}^3}{\text{قا}^3 \text{س}^3} = \frac{1}{\text{قا}^3 \text{س}^3} = \frac{1}{\text{قا}^3 \text{س}^3}$$

$$[47] \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{1}{\text{س}} \times \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}}$$

$$\text{عند س} = 2 \therefore \text{ميل المماس} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}}$$

$$[48] \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{1}{\text{س}^2} \times \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}^2} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}^2}$$

$$\text{عند س} = 1 \therefore \text{ميل المماس} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}^2} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}^2}$$

$$[49] \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{1}{\text{س}} \times \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}}$$

$$\text{عند س} = 3 \therefore \text{ميل المماس} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}}$$

$$[50] \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$$

$$\times \frac{\text{س}^4}{3 - \text{س}^2} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}}$$

$$\text{عند س} = 1 \therefore \text{ميل المماس} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}} = \frac{1}{\text{لود}^2 \text{ س}}$$

$$\therefore \text{س}^2 \text{ص}^2 + 2 \text{س}^2 \text{ص} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} - \text{ب} \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} \times \frac{\text{ص}^2}{\text{س}}$$

وذلك بالتعويض عن قيمة ب من (١)

$$\therefore \text{س}^2 \text{ص}^2 + 2 \text{س}^2 \text{ص} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} = \text{س}^2 \left(\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} \right)$$

$$\therefore \text{س}^2 \text{ص}^2 + 2 \text{س}^2 \text{ص} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} - \text{س}^2 \left(\frac{\text{ص}^2}{\text{س}} \right) = 0$$

المجموعة الرابعة :

مسائل على تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية
أكمل ما يأتي :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ هـ} + \text{ث} \quad [1]$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ هـ} + \text{ث}$$

$$[2] = \text{س} + \text{س}^2 - \text{هـ} \text{ س}^3$$

$$\text{س} = \frac{1}{3} \times \text{س}^3 - \text{هـ} \text{ س}^3 + \text{ث} = \frac{1}{3} - \text{هـ} \text{ س}^3 + \text{ث}$$

$$[3] = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \text{ هـ} \text{ س}^3$$

$$= \frac{1}{3} - \text{هـ} \text{ س}^3 + \text{ث}$$

$$[4] = \text{س} + \text{هـ} \text{ س}^2 + \text{ث}$$

$$[5] = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{5} \text{ هـ} \text{ س}^5 + \text{س} \right] = \frac{1}{5} \text{ هـ} \text{ س}^5 + \text{ث}$$

$$[6] = \text{هـ} \text{ س}^2 + \text{ث}$$

$$[7] = -\text{هـ} \text{ س} + \text{ث}$$

$$[8] = 0 = \frac{1}{\text{س}} \cdot \text{س} = \text{س} \text{ لو هـ} + \text{ث}$$

$$[9] = \text{س} \cdot \text{س} = \frac{1}{\text{س}} = \text{س}^2 + \text{ث}$$

$$[10] = (2 + \text{س}) \cdot \text{س} = \frac{1}{\text{س}} = \text{س}^2 + \text{س} + \text{ث}$$

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$[11] = \text{لو هـ} + \text{هـ} \text{ س} + 12 + \text{ث}$$

$$[12] = \text{هـ} \text{ هـ} \text{ هـ} \text{ س} \cdot \text{س} = \text{هـ} \text{ هـ} \text{ هـ} \text{ س} + \text{ث}$$

$$[51] = \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ ولمعرفة نقطة التماس نضع}$$

$$\text{س} = 1 \text{ في معادلة المنحنى الأصلية} \therefore \text{ص} = \text{لو هـ} = -\text{لو هـ}^2$$

$$\therefore \text{ج} = (1 - \text{لو هـ}^2) \therefore \text{معادلة المماس هي} :$$

$$\text{ص} + \text{لو هـ}^2 = \text{س} - 1 \therefore \text{المماس يقطع محور السينات في 1}$$

$$\text{بوضع ص} = 0 \therefore \text{س} = 1 + \text{لو هـ}^2$$

$$\therefore \text{س} = 1 + \text{لو هـ}^2 \therefore \text{المماس يقطع محور الصادات}$$

$$\text{في نقطة ب} \text{ بوضع س} = 0 \therefore \text{ص} = 1 - \text{لو هـ}^2$$

$$\therefore \text{ب} = (0, 1 - \text{لو هـ}^2)$$

$$\therefore \text{ب} = \text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}$$

$$\therefore \text{ب} = (1 + \text{لو هـ}^2)^2 + (1 - \text{لو هـ}^2)^2$$

$$\therefore \text{ب} = 2(1 + \text{لو هـ}^2)^2$$

$$[52] = \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} \text{ عند 1} \therefore \text{ميل المماس} = 1$$

$$\text{ميل العمودي} = -1 \therefore \text{معادلة العمودي هي} : \text{ص} - \text{لو}$$

$$\text{هـ} = (1 - \text{س}) \therefore \text{بوضع ص} = 0 \therefore \text{س} = 1 + \text{لو هـ}^2$$

$$\therefore \text{ب} = (1 + \text{لو هـ}^2, 0)$$

$$\therefore \text{ب} = (1 - 1 - 1 + \text{لو هـ}^2) + (1 + \text{لو هـ}^2)$$

$$= 2(1 + \text{لو هـ}^2)^2$$

$$[53] = \text{لو هـ} \text{ ص} = \text{لو هـ} - \text{س} + \frac{1}{\text{س}} + \text{لو هـ} \left(\frac{1}{\text{س} - 1} \right) \therefore$$

$$\text{لو هـ} \text{ ص} = -\text{س} + \frac{1}{\text{س}} + \left[\text{لو هـ} (1 + \text{س}) - \text{لو هـ} (1 - \text{س}) \right]$$

$$\therefore \text{ص} \times \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} + 1 - \left[\frac{1}{\text{س} - 1} - \frac{1}{\text{س} + 1} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\text{س} - 1} + \frac{1}{\text{س} + 1} = \left[\frac{\text{س} + 1 - \text{س} - 1}{\text{س}^2 - 1} \right] = \frac{-2}{\text{س}^2 - 1}$$

$$= \frac{1 + \text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 - 1} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 - 1}$$

$$\therefore (1 - \text{س}) \frac{\text{س}}{\text{س}} = \text{س}^2 \text{ ص}$$

$$[54] = \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ب}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \times \frac{\text{ب}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}^2}{\text{س}^2} \therefore \text{ص} \times \frac{\text{ب}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}^2}{\text{س}^2}$$

$$\text{س}^2 \frac{\text{ب}}{\text{س}} = \text{ب} \text{ ص} \therefore \text{ب} \text{ ص} = \text{س}^2$$

$$\frac{1}{6} \text{ هـ } 3 \text{ س } + \text{ ث } =$$

$$[24] \quad \left[\frac{1}{9} \times 7 \right] \text{ هـ } 3 \text{ س } \times \text{ هـ } 3 \text{ س } = \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{9} \times 7 = \left[\frac{1}{9} \text{ هـ } 3 \text{ س } \times 7 \text{ س } \right] \text{ و.س.} = \frac{7}{9} \text{ هـ } 3 \text{ س } + \text{ ث }$$

أوجد التكاملات الآتية :

$$[25] \quad \frac{1}{5} \text{ هـ } 5 \text{ س } + \frac{1}{4} \text{ هـ } 4 \text{ س } + \text{ ث } =$$

$$[26] \quad \left[\frac{1}{6} \times 2 \right] \text{ هـ } 2 \text{ س } = \text{ و.س.} = \frac{1}{6} \text{ هـ } 2 \text{ س } + \text{ ث }$$

$$[27] \quad \frac{1}{3} \text{ هـ } 3 \text{ س } + \frac{1}{6} \text{ هـ } 6 \text{ س } + \text{ ث } =$$

$$[28] \quad \left[(2 + \text{س}) \right] = \text{ و.س.} = \frac{1}{6} \text{ هـ } 2 \text{ س } + \text{ ث }$$

$$[29] \quad \text{د (س)} = \text{س} - 2 \text{ س } + 1 \leq \text{د (س)} = 2 \text{ س}$$

$$2 - \therefore \text{المقدار} = \left[\frac{1}{6} \right] \text{ هـ } 2 \text{ س } - \text{س} + 1 \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{6} \text{ هـ } 2 \text{ س } - \text{س} + 1 + \text{ ث } =$$

$$[30] \quad \left[\frac{1}{\text{س}} \right] = \text{ و.س.} = \text{لوه} | \text{س} | + \text{ ث }$$

$$[31] \quad \text{د (س)} = \text{هـ} + \text{س} - \text{هـ} - \text{س} , \text{د (س)} = \text{هـ} - \text{هـ} - \text{س} - \text{س}$$

$$\text{المقدار} = \text{لوه} | \text{هـ} + \text{س} - \text{هـ} - \text{س} | + \text{ ث }$$

$$[32] \quad \text{د (س)} = \text{س} + 2 \text{ س } + 1 \leq \text{د (س)} =$$

$$2 \text{ س } + 2 \therefore \text{المقدار} = \left[\frac{1}{6} \right] \text{ هـ } 2 \text{ س } + \frac{2 + 2 \text{ س } + 1}{1 + 2 \text{ س } + 1} \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{6} \text{ لوه} | \text{س} + 2 \text{ س } + 1 | + \text{ ث } =$$

$$[33] \quad \text{د (س)} = \text{هـ} + \text{س} + 0 \leq \text{د (س)} = \text{هـ} + \text{س} + 0$$

$$\text{المقدار} = \left[\frac{1}{4} \right] \text{ هـ } 4 \text{ س } + \frac{2 \text{ هـ } 4 \text{ س } + 0}{0 + 2 \text{ هـ } 4 \text{ س } + 0} \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{4} \text{ لوه} | \text{هـ} + \text{س} + 0 | + \text{ ث } =$$

$$[34] \quad \text{د (س)} = 0 - \text{ظا} \leq \text{د (س)} = - \text{ظا}$$

$$\text{المقدار} = \left[- \right] \text{ هـ } 0 - \text{ظا} = \text{ و.س.} = \text{لوه} | 0 - \text{ظا} | + \text{ ث }$$

$$[13] \quad \text{لاحظ أن : هـ } 2 \text{ لوه} = \text{هـ } 2 \text{ لوه} = \text{س}$$

$$\text{التكامل} = \left[\text{هـ } 2 \text{ س } \times \text{هـ } 2 \text{ لوه} \right] \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{3} = \left[\left(\text{هـ } 2 \text{ س } \times \text{هـ } 2 \text{ س } \right) \right] \text{ و.س.} = \frac{1}{3} \text{ هـ } 2 \text{ س } + \text{ ث }$$

$$[14] \quad \text{هـ} + 0 + \text{ ث } =$$

$$[15] \quad \left[\frac{1}{6} \times 6 \right] \text{ هـ } 2 \text{ س } = \text{ و.س.} = \text{هـ } 2 \text{ س } + \text{ ث }$$

$$[16] \quad \left[\text{هـ} - (\text{س} - 0) \right] = \text{ و.س.} = - \text{هـ} - (\text{س} - 0) + \text{ ث }$$

$$[17] \quad \left[\text{هـ} - (\text{س} + 2) \right] = \text{ و.س.}$$

$$= - \left[\text{هـ} - (\text{س} + 2) \right] \text{ و.س.}$$

$$= - \text{هـ} - (\text{س} + 2) + \text{ ث } = \frac{3 -}{2 + \text{س}} + \text{ ث }$$

$$[18] \quad \left[\frac{3}{6} \right] \text{ هـ} - (\text{س} + 0) = \text{ و.س.}$$

$$= - \left[\frac{3}{6} \right] \text{ هـ} - (\text{س} + 0) = \text{ و.س.} = - \frac{3}{6} \text{ هـ} - (\text{س} + 0) + \text{ ث }$$

$$= \text{ ث } + \frac{3 -}{0 + \text{س}}$$

$$[19] \quad \left[\text{هـ } 3 \text{ لوه} \right] = \text{ و.س.} = \left[\text{س} \right] \text{ و.س.} = \frac{1}{4} \text{ س } + \text{ ث }$$

$$[20] \quad \left[\frac{\text{و.س.}}{\text{و.س.}} \right] \text{ هـ } 3 \text{ لوه} = \text{ و.س.} = \left[\text{س} \right] \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{3} \text{ س } + 2 = \text{ (حيث } 2 = \text{ ثابت)}$$

$$\left[\left(\frac{1}{3} \text{ س } + 2 \right) \right] = \text{ و.س.}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \text{ س } + 2 \text{ س } + \text{ ث } = \frac{1}{12} \text{ س } + 2 \text{ س } + \text{ ث } =$$

$$[21] \quad \text{هـ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ س } + \text{ ث } = \frac{1}{4} \text{ س } + \text{ ث }$$

$$[22] \quad \text{س هـ}^{13} = \text{ (تكامل الثابت = الثابت } \times \text{ س)}$$

$$[23] \quad \left[\text{هـ } 3 \text{ س } \times \text{هـ } 3 \text{ لوه} \right] = \text{ و.س.}$$

$$\left[\text{هـ } 3 \text{ س } \times \text{ و.س.} \right] = \frac{1}{6} \left[\text{س} \right] \text{ هـ } 3 \text{ س } = \text{ و.س.}$$

[۴۳] د (س) = ۲س + جتاس ≤ د (س) = ۲ - جاس

المقدار = ۲س + جتاس + ث

[۴۴] د (س) = ۵ + ۲قاس ≤ د (س) = قاس ظاس

المقدار = ۵ه + ۲قاس + ث

[۴۵] د (س) = $\frac{1}{س}$ ≤ د (س) = $\frac{1-}{س}$

المقدار = $-\left[\frac{1-}{س} \cdot ه \cdot \frac{1}{س} \cdot و \cdot س - ه \cdot \frac{1}{س} + ث\right]$

[۴۶] د (س) = ۱ + جتاس ≤ د (س) = - جاس

المقدار = - ه + جتاس + ث

[۴۷] د (س) = $\frac{۲}{س}$ ≤ د (س) = $\frac{۴-}{س}$

المقدار = $-\left[\frac{۴-}{س} \cdot ه \cdot \frac{۲}{س} \cdot و \cdot س - ه \cdot \frac{۲}{س} + ث\right]$

[۴۸] د (س) = ۳ + لو ه س ≤ د (س) = $\frac{1}{س}$

المقدار = $\left[\frac{1}{س} \cdot ه \cdot \frac{۳}{س} \cdot و \cdot س - ه \cdot \frac{۳}{س} + ث\right]$

[۴۹] د (س) = $\sqrt{1-س} + ۱$

≤ د (س) = $\frac{1}{\sqrt{1-س}}$

المقدار = $\left[\frac{1}{\sqrt{1-س}} \cdot ه \cdot \frac{1}{\sqrt{1-س}} \cdot و \cdot س - ه \cdot \frac{1}{\sqrt{1-س}} + ث\right]$

= ۱ + $\sqrt{1-س}$ + ث

[۵۰] المقدار = $[(ه - ۲س + ۲ + ه س) \cdot و \cdot س]$

= $[ه - ۲س \cdot و \cdot س + ۲ \cdot و \cdot س + ه س \cdot و \cdot س]$

= $-\left[\frac{1}{س} - [ه - ۲س \cdot و \cdot س + ۲ \cdot و \cdot س + ه س \cdot و \cdot س]\right]$

= $و \cdot س - \frac{1}{س} - ه - ۲س + ۲ + ه س + ث$

[۵۱] د (س) = ه س - ۱ ≤ د (س) = ه س

المقدار = $\left[\frac{1}{س} \cdot ه س \cdot قاس (ه س - ۱) \cdot و \cdot س\right]$

= $\frac{1}{س} \cdot ظا (ه س - ۱) + ث$

[۳۵] د (س) = ۲س + جاس ≤ د (س) = ۲س +

جتاس. و س. المقدار = $\frac{1}{س} \left[\frac{۲س + جتاس}{س + جاس} \right]$

= $\frac{1}{س} \cdot لو ه | ۲س + جاس | + ث$

[۳۶] د (س) = ۱ + ه س ≤ د (س) = ۲ه س

المقدار = $\frac{1}{س} \left[\frac{۲ه س}{ه س + ۱} \cdot و \cdot س - \frac{1}{س} \cdot لو ه | ۱ + ه س | + ث\right]$

[۳۷] د (س) = ۲س - ۱ + س

≤ د (س) = ۲س - ۲

∴ المقدار = $\frac{1}{س} \left[(۲س - ۲) \cdot ه س - ۱ + س \cdot و \cdot س\right]$

= $\frac{1}{س} \cdot ه س - ۲س - ۱ + س + ث$

[۳۸] د (س) = جاس - س ≤ د (س) = جتاس - ۱

المقدار = ه جاس - س + ث

[۳۹] د (س) = ه س + ۱ ≤ د (س) = ه س

المقدار = $\left[(ه س + ۱) \cdot \frac{1-}{س} \cdot و \cdot س \cdot ه س\right]$

= $\frac{1}{س} (ه س + ۱) + ث$

[۴۰] د (س) = ه س + ۱ ≤ د (س) = ۲س ه س

المقدار = $\left[\frac{1}{س} \cdot ۲س ه س (ه س + ۱) \cdot و \cdot س\right]$

= $\frac{1}{س} \cdot (ه س + ۱) + ث = \frac{1}{س} \cdot (ه س + ۱) + ث$

[۴۱] د (س) = ۳ + ۵ لو ه ۹س ≤ د (س) = $\frac{۵}{س}$

المقدار = $\frac{1}{س} \cdot \frac{۵}{س} \cdot جتا (۳ + ۵ لو ه ۹س) \cdot و \cdot س$

= $\frac{1}{۳۵} \cdot جتا (۳ + ۵ لو ه ۹س) + ث$

[۴۲] = $[- ه - س \cdot و \cdot س + \frac{1}{س} \cdot جتا ۲س \cdot و \cdot س]$

+ $[و \cdot س - ه - س + \frac{1}{س} \cdot جتا ۲س + ث]$

[٩] ٢

[١٠] ١

$$[١١] \text{ نها} = \left(\frac{4}{س} + ١ \right) \text{نها} \times \left(\frac{4}{س} + ١ \right) \text{نها} = ٣ \left(\frac{4}{س} + ١ \right) \text{نها}$$

$$= ١ \times ١ = ١$$

$$[١٢] \text{ نفرض ص} = \text{هـ} - \text{س} = ١ - \text{س} \text{ هـ} = \text{س} - \text{ص} = ١ + \text{ص}$$

$$\therefore \text{س} - \text{لوه} = \text{هـ} = \text{لوه} (\text{ص} + ١) \therefore \text{لوه} (\text{ص} + ١)$$

$$= \text{س} - \text{س} = \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\text{ص}}{(\text{ص} + ١)}$$

$$[١٣] \text{ لوه} ٢ = \text{لوه} ٢$$

$$[١٤] \text{ نها} = (١ + ٣ \text{ ظا} \text{ س}) \text{ظا} \text{ س} = \frac{١}{٣ \text{ هـ}}$$

$$[١٥] \text{ بوضع ص} = \text{س} + ١ \therefore \text{س} = \frac{١ + \text{ص}}{٢}$$

$$\therefore \text{المقدار} = \text{نها} = \left(\frac{٢ - \text{ص}}{\text{ص}} \right) \left(\frac{١}{٢} + \text{ص} \right)$$

$$= \left(\frac{٢ - \text{ص}}{\text{ص}} + ١ \right) \left(\frac{١}{٢} + \text{ص} \right) = \frac{١}{٢} \left(\frac{٢ - \text{ص}}{\text{ص}} + ١ \right) \times \text{ص}$$

$$= \frac{١}{٢} \left(\frac{٢ - \text{ص}}{\text{ص}} + ١ \right) \times \text{ص} = ١ - \text{هـ} = ١ \times \frac{١}{٢} \times ٢ - \text{هـ} = \frac{١}{٢} \left(\frac{٢ - \text{ص}}{\text{ص}} + ١ \right)$$

$$[١٦] \text{ بوضع ص} = \text{س} = \frac{١}{٢} \therefore \text{س} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{س} ٣ = \frac{٣}{٢} \text{ ص} \therefore \text{المقدار} = \text{نها} = \frac{\left(\frac{٣}{٢} + ١ \right) \text{ص}}{\text{ص}}$$

$$\frac{٣}{٢} =$$

حلول تمارين (٢ - ٢)

$$[١] \text{ هـ} ٣ \text{ س} ٣$$

$$[٢] \text{ د} (س) = \text{هـ} ١ \text{ س} \therefore \text{د} (س) = \text{د} (س)$$

$$\therefore \text{د} (٢ -) = \text{د} (٢ -)$$

[٣] (١.٢)

$$[٤] \text{ ص} ١ = \text{لوه} ٣ (١ + \text{س}) \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{ص} ١ = \frac{\frac{١}{٢} (١ + \text{س}) \times ٣}{\frac{١}{٢} (١ + \text{س}) ٣} = \frac{١}{(١ + \text{س}) ٢}$$

$$\text{وبالمثل ص} ٢ = \frac{١}{(١ + \text{س}) ٢} \therefore \text{النسبة بينهما} = ١ : ١$$

$$[٥] \text{ و ص} = \frac{١٥ \text{ س} ٤ \text{ هـ} ٣ \text{ س} ٥}{\text{س}}$$

$$[٦] \text{ و ص} = \frac{٢ (١ - \text{س}) \text{ هـ} (١ - \text{س}) - \text{س} ٢}{\text{س}}$$

$$[٧] \text{ ص} ١ = \text{ص} ٢ - (٣ - \text{س}) ٢ - (٣ - \text{س}) ٢ \times ٣ - \text{س} ٣ \text{ لوه} ٣$$

$$= \text{ص} ٢ - (٣ - \text{س}) ٢ - (٣ - \text{س}) ٢ \times ٣ - \text{س} ٣ \text{ لوه} ٣$$

$$[٨] \text{ ص} ٢ = \text{ص} ١ = ١٠ \text{ س} ٥ \text{ هـ} ٥ \text{ س} ٢ -$$

$$\therefore \text{ص} ١ = \frac{١٠ \text{ س} ٥ \text{ هـ} ٥ \text{ س} ٢ - (٣ - \text{س}) ٢}{(٣ - \text{س}) ٢} = \frac{١٠ \text{ س} ٥ \text{ هـ} ٥ \text{ س} ٢ - (٣ - \text{س}) ٢}{(٣ - \text{س}) ٢}$$

$$[٩] \text{ و ص} = \frac{٢}{٧ - \text{س} ٢}$$

$$[١٠] \frac{(١ + \text{س}) ٢}{(٢ + \text{س}) \text{ س}} = \frac{١ + \text{س}}{(٢ + \text{س}) \frac{١}{٢}} = \frac{١ + \text{س}}{\frac{١}{٢} (٢ + \text{س})} = \frac{١ + \text{س}}{\frac{١}{٢} (٢ + \text{س})}$$

$$[١١] \text{ ص} ١ = \left(\frac{٢ - (٧ + \text{س}) \text{ س} ٢}{(٧ + \text{س}) ٢} \right) \times \frac{٧ + \text{س}}{\text{س} ٢}$$

$$= \frac{١٤ + \text{س}}{(٧ + \text{س}) \text{ س}} = \frac{\text{س} ١٤ + \text{س} ٢}{(٧ + \text{س}) \text{ س}} = \frac{\text{س} ٢ - \text{س} ١٤ + \text{س} ٢}{(٧ + \text{س}) \text{ س}}$$

$$[١٢] \text{ س} ٢ = \frac{١}{٣} \times \text{س} ٢ + \text{س} ٢ \text{ لوه} ٣$$

$$= \text{س} (١ + \text{س} ٢ \text{ لوه} ٣)$$

$$[١٣] \text{ و ص} = \frac{٤ \times (٩ + \text{س} ٤) ٢}{٣ \times (٩ + \text{س} ٤) \times ٢}$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٨}{(٩ + \text{س} ٤)}$$

$$[28] \quad \frac{و}{س} = 2 \text{ س لو ه } \frac{س}{م} + \frac{1}{س} \times س^2$$

$$2 \text{ س لو ه } \frac{س}{م} + \frac{س}{س}$$

$$\frac{و}{س} = 2 \text{ س لو ه } \frac{س}{م} + \frac{1}{س} \times س^2 + 1$$

$$2 \text{ س لو ه } \frac{س}{م} + 3 = \frac{و}{س} = \frac{2}{3} \text{ س } , \text{ عند س } = 4$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{و}{س} = \frac{2}{3} \text{ س}$$

$$[29] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{س}{ن} = \text{ه س}$$

$$1 + س + \frac{س}{2} + \frac{س}{3} + \frac{س}{4} + \dots = \infty$$

$$\therefore \frac{و}{س} (\text{ه س})$$

$$0 + 1 + \frac{س}{2} + \frac{س}{3} + \frac{س}{4} + \dots = \infty$$

$$1 + س + \frac{س}{2} + \frac{س}{3} + \frac{س}{4} + \dots = \infty \text{ ه س}$$

$$[30] \quad \text{ص} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+س}{1-س} \right) \therefore$$

$$\text{ص} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+س}{1-س} \right) \times \frac{1-س}{2} \times \frac{2(1-س)}{(1+س)(1-س)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1-س}{2} \times \frac{2}{(1+س)(1-س)}$$

$$= \frac{1-س}{2(1+س)(1-س)}$$

$$\therefore \text{الايم ن} = (1-س)(1+س)$$

$$\times \frac{1-س}{2(1+س)(1-س)}$$

$$= \frac{1-س}{2(1+س)(1-س)} + 2 \text{ س ص}$$

$$= -2 \text{ س ص} + 2 \text{ س ص} = \text{صفر}$$

$$[31] \quad \frac{و}{س} = 2 \text{ س } - \frac{1}{س}$$

$$\therefore \text{المماس} [\text{محور السينات}] \therefore \frac{و}{س} = \text{صفر}$$

$$\therefore 2 \text{ س } = 8 \therefore 2 \text{ س } = 3 \therefore \frac{1}{3} = \frac{و}{س}$$

$$[32] \quad \text{عند س} = 1 - \text{تكون ص} = 3 - \text{ه} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = 3 \text{ ه س} = \text{ص} , \text{ عند النقطة } (1, 1)$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{3}{4} \therefore \text{ميل العمودي} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{معادلة العمودي هي: ص} - \frac{3}{4} = \frac{4}{3} (س + 1)$$

$$\text{بالضرب } \times 3 \text{ ه} \therefore \text{معادلة العمودي هي:}$$

$$3 \text{ ه ص} - 9 = 4 \text{ ه س} - 4$$

$$\text{أى: ه س} + 3 \text{ ه ص} + 9 = 4 \text{ ه س} - 4$$

$$[33] \quad \frac{و}{س} = 2 \text{ س } \times 100 = 200 \text{ ه } - 120 \text{ ه } - 100 \text{ ه } ,$$

$$\text{عند } 10 = \frac{و}{س} \therefore 120 \text{ ه } \times 10 = \frac{و}{س} = 1200$$

$$[34] \quad \frac{و}{س} = \frac{1}{س+10} \times (100 + س) + \text{لو ه } (10 + س)$$

$$\text{عند } 10 = \frac{و}{س} : 100 \times \frac{1}{10} + \text{لو ه } 10 = 12, 8 \text{ جم/يوم}$$

$$\text{عند } 10 = \frac{و}{س} : 110 \times \frac{1}{10} + \text{لو ه } 20 = 12, 7 \text{ جم/يوم}$$

$$\text{عد } 10 = \frac{و}{س} : 120 \times \frac{1}{10} + \text{لو ه } 20 = 12, 8 \text{ جم/يوم}$$

\therefore انتاج الخلية يتناقص .

حلول تمارين (2 - 3)

$$[1] \quad \frac{1}{2} = (س)' [\text{ه س} + \text{ه} - س]$$

$$\frac{1}{2} = (س)' [\text{ه س} - \text{ه} - س] + 1 \therefore 0 = 1 \text{ ث} \therefore 0 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} = (س)' [\text{ه س} - \text{ه} - س]$$

$$د (س) = \frac{1}{2} [\text{ه س} - \text{ه} - س]$$

[۱۳] بفرض $ص = هس + ۱$ ، $و = ص = هس$. و س

∴ المقدار $\left[\frac{۲}{ص} و = ۲ \text{ لوهر } |ص| + ۱ \right]$

$$= ۲ \text{ لوهر } |هس + ۱| + ۱ = ۳$$

حل آخر:

$$د (س) = هس + ۱ ، د' (س) = هس$$

∴ المقدار $۲ \text{ لوهر } |هس + ۱| + ۱ = ۳$

$$[۱۴] د (س) = ۴ - س ، د' (س) = ۴$$

∴ المقدار $\left[\frac{۱}{۴} و = \frac{۴}{۱-۴} و س \right]$

$$= \frac{۱}{۴} \text{ لوهر } |۴ - س| + ۱ = ۳$$

$$[۱۵] د (س) = س' + ۱ ، د' (س) = س' = س$$

$$= \frac{۱}{۲} \left[\frac{س'}{س' + ۱} و س = \frac{۱}{۲} \text{ لوهر } |س' + ۱| + ۱ \right]$$

$$[۱۶] د (س) = ظاس ، د' (س) = قاس$$

∴ المقدار $لوهر |ظاس| + ۱ = ۳$

$$[۱۷] د (س) = جاس - جتاس ،$$

$$د' (س) = جاس + جتاس$$

∴ المقدار $لوهر |جاس - جتاس| + ۱ = ۳$

$$[۱۸] د (س) = ۱ + جاس ، د' (س) = جتاس$$

∴ المقدار $لوهر |۱ + جاس| + ۱ = ۳$

$$[۱۹] د (س) = قاس ، د' (س) = قاس ظاس$$

∴ المقدار $لوهر |قاس - ۱| + ۱ = ۳$

$$[۲۰] د (س) = لوهر س ، د' (س) = \frac{۱}{س}$$

∴ المقدار $لوهر |لوهر س| + ۱ = ۳$

$$= \frac{۱}{۲} (هس + هس - س) + س ، د (۰) = ۱ \Leftarrow س = ۰$$

$$∴ د (س) = \frac{۱}{۲} (هس + هس - س) = د' (س)$$

$$[۲۱] ص = ۴ هس' و س = ۴ \times \frac{۱}{۲} هس' + ۱$$

$$= ۴ هس' + س' + ۱ = د (۰) = ۲ \Leftarrow س = ۰$$

$$∴ د (س) = ۴ هس' = د (۲ - س) = ۴ - هس'$$

$$[۲۲] \left[\theta \text{ ظا } \theta = \theta \text{ جتا } \frac{\theta}{\theta} و س \right]$$

$$∴ د (س) = جتا \theta ، د' (س) = - \text{جا } \theta$$

$$∴ المقدار = \left[- \frac{\theta - \text{جا } \theta}{\theta} و س = - \text{لوهر } |جتا \theta| + ۱ \right]$$

$$[۲۳] ۲ = ۲ هس' و س = ۲ هس' + س'$$

$$[۲۴] \frac{۱}{۴} هس' + س'$$

$$[۲۵] س' + ۲ هس' + س'$$

$$[۲۶] ۴ \text{ لوهر } |س| + هس - س' + ۱$$

$$[۲۷] \frac{۱}{۳} - هس' - ۱ + س' + ۱$$

$$[۲۸] \frac{۷}{۳} \times \frac{۱}{۳} هس' - ۴ + ۱ = \frac{۷}{۹} هس' - ۳ + ۴ + ۱$$

$$[۲۹] بوضع $ص = هس + ۱$ ، $و = ص = هس$. و س$$

∴ المقدار $\left[۲ ص' و ص = \frac{۲}{۳} ص' + ۳ \right]$

$$= \frac{۲}{۳} (هس + ۱) + ۳$$

$$[۳۰] \left[(هس' + هس' + هس' - هس' - س) و س \right]$$

$$= \frac{۱}{۲} هس' + هس' - هس' - هس' + س' + ۱$$

$$[۳۱] \frac{۱}{۳} = \left[۳ هس' + ۱ و س \right]$$

$$= \frac{۱}{۳} هس' + ۱ + ۱ = ۳$$

[۲۲] ص = س × س لو ه = ۱ ∴ $\frac{وس}{وس} = صفر$

[۲۳] ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س ، ۱/س = ۱/س

∴ $\frac{وس}{وس} = \frac{ص}{س} = \frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$

∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$

[۲۴] ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س

∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$

$\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$ ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$

[۲۵] ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س

ص (۲) = $\frac{۱-س}{س} = \frac{۱-س}{س}$

[۲۶] ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س

∴ ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س ∴ ص (۲) = ۱/س

[۲۷] ص = س لو س

∴ ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س ∴ ص = ۱/س

∴ ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س ∴ ص = ۱/س

∴ ص (۲) = $\frac{۱-س}{س} = \frac{۱-س}{س}$

[۲۸] ه س ص = س + ص

∴ (ص + س) = س + ص = ۱/س

∴ ص س + س س = ۱/س ∴ ص س = ۱/س

∴ (س س - ص س) = ۱/س ∴ ص س = ۱/س

[۲۹] ص س + س = ۱/س ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$

∴ ص س + س = ۱/س ∴ $\frac{۱}{س} = ۱/س$

[۱۲] نفرض أن س = ۱ + ه ∴ ۱ - س = ه

عندما ه ∞ ∴ س ∞ ∴ المقدار = ه

$\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$ ∴ $\frac{۱-س}{س} = ۱-س$

$\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$ ∴ $\frac{۱-س}{س} = ۱-س$

۱-ه = ۱ × ۱-ه = ۱-ه

[۱۳] بوضع ص = ۱ + س

∴ المقدار = $\frac{۱-س}{س} = ۱-س$ ∴ $\frac{۱-س}{س} = ۱-س$

$\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$ ∴ $\frac{۱-س}{س} = ۱-س$

۱-ه = ۱ × ۱-ه = ۱-ه

[۱۴] ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س

[۱۵] ۱ + ۱/س

[۱۶] ۱/س

[۱۷] $\frac{۱}{س}$

[۱۸] $\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$

[۱۹] $\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$

$\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$

[۲۰] $\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$

$\frac{۱-س}{س} = ۱-س = ۱-س$

[۲۱] ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س

∴ ص = ۱/س ، ۱/س = ۱/س ∴ ص = ۱/س

[٣٥] ص = $\frac{٢}{٣} \times \text{لور} ٣ + \frac{٢}{٣} = ٠$ عندما

$\frac{٢}{٣} (١ - \text{لور} ٣) = ٠ \therefore \text{لور} ٣ = ١$

$\therefore \text{س} = ٣$

[٣٦] ص = $\frac{٨١}{٣} - \text{س} ٣ = ٠$ عندما $٣ - ٢٧ = ٠$

$\therefore \text{س} = ٣$

[٣٧] ص = $\frac{١}{٣} + \text{س} = ٠$ عندما

$\therefore \text{س} = -\frac{١}{٣}$

[٣٨] س هـ = $\frac{١}{٣} - \text{ص} + \text{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ، عند س = ٠

$\therefore \text{ص} = \frac{٢}{٣}$ بالاشتقاق بالنسبة الى س

$\therefore \frac{١}{٣} - \text{ص} + \text{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ، عند س = ٠

$\therefore \text{هـ} = \frac{١}{٣} + \text{ص}$

$\therefore ٠ = \frac{١}{٣} - \text{ص} + \frac{١}{٣} + \text{ص}$

$\therefore \text{ص} = ٠$

[٣٩] د (س) = $٣ + \text{س} ٣$ ، د' (س) = $٣ + ٣\text{س} ٢$

\therefore المقدار = $٣ + ٣\text{س} ٢$

$\therefore \text{لور} ٣ = ٣ + ٣\text{س} ٢$

[٤٠] $\left[\frac{\text{س}}{\text{س}} \right] = \left[\frac{\text{س}}{\text{س}} \right]$

$\therefore \text{لور} ٣ = ٣ + ٣\text{س} ٢$

[٤١] $\left[\frac{١}{٣} - \text{س} ٣ \right] = \left[\frac{١}{٣} - \text{س} ٣ \right]$

$\therefore \text{لور} ٣ = ٣ + ٣\text{س} ٢$

[٤٢] $\left[\frac{١}{٣} - \text{س} ٣ \right] = \left[\frac{١}{٣} - \text{س} ٣ \right]$

$\therefore \text{لور} ٣ = ٣ + ٣\text{س} ٢$

$\therefore (٢\text{س} ٣ + \text{س} ٢ + \text{س} ٢) = ٠$

\therefore بالفك والقسمة على س

$\therefore ٢\text{س} ٢ + \text{س} ٢ + \text{س} ٢ = ٠$

[٣٠] $\frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{١}{٣} + \text{س} ٢ + \text{لور} ٣ (١ + \text{س})$

$\therefore \text{س} ٢ = ١ + (١ + \text{س}) \text{لور} ٣$

[٣١] ص = $٣ + \text{س} ٣$

$\therefore \text{لور} ٣ = ٣ + \text{س} ٣$

$\therefore \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{١}{٣} + \text{س} ٢ + \text{س} ٣$

$\therefore \text{ص} = ٣ + \text{س} ٣$

[٣٢] $\text{لور} ٣ = \text{جاس} ٣ (١ - \text{س})$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{جاس} ٣}{٣ - ١} - (١ - \text{س})$

$\therefore \text{ص} = \frac{\text{جاس} ٣}{٣ - ١} - (١ - \text{س})$

$\therefore \text{جاس} ٣ (١ - \text{س})$

[٣٣] $\text{لور} ٣ = \text{هـ} ٣$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{هـ} ٣}{٣}$

$\therefore \text{ص} = \text{هـ} ٣$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٣}$

[٣٤] ص = $٣ + \text{س} ٣$ ، عندما

$\therefore \text{لور} ٣ = ٣ + \text{س} ٣$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٣}$

[8] $\frac{1}{\text{س}} = 7 - 2\text{هـ}$

$\therefore \text{و ص} = (7 - 2\text{هـ}) \text{و س}$

$\therefore \text{ص} = 7\text{و س} - 2\text{هـ س} + \text{ث}$ لكن

$3 = 7\text{و س} - 2\text{هـ س} + \text{ث}$

$\therefore 3 = 7\text{و س} - 2\text{هـ س} + \text{ث} \therefore \text{ث} = 7 - 7\text{و س}$

$\therefore \text{د (س)} = 7\text{و س} + 7 - 7\text{و س} - 2\text{هـ س}$

$= 7\text{و س} - (2\text{هـ س} - 1\text{و س}) = 2\text{هـ س}$

حلول اختبارات كتاب لامى على الوحدة الثانية

الاختبار الأول

السؤال الأول: (1) $\text{ص} = \text{هـ} \Leftarrow \frac{6}{\text{س}} = \frac{6}{\text{س}}$ صفر

(2) $\text{ص} = \text{س} \text{و س} \Leftarrow \text{و س} = \text{و س}$

(3) $\text{د (س)} = 13 - 2\text{و س} \Leftarrow \text{د (س)} = 2$

$\therefore \text{و س} = \frac{2}{(13 - 2\text{و س})}$

(4) $\text{ص} = \text{و س} = 2\text{هـ س} \therefore \text{المقدار} = 2\text{هـ س} \text{و س}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{و س} + \frac{1}{3} \text{و س}$

السؤال الثاني:

(1) $\text{و س} = (1 + \pi)(\text{و س} + 1) \cdot \pi \cdot 2\text{هـ س}$

(2) $\text{و س} = 2 - \text{و س} \text{جاس} \cdot 3\text{و س} \cdot \text{و س}$

$= - \text{و س} \text{جاس} \cdot 3\text{و س} \cdot \text{و س}$

(3) $\text{و س} = \frac{1}{4} \text{و س} + (2 + \text{و س}) + (2 + \text{و س})$

$\frac{6}{2 + \text{و س}} + \frac{2}{3 + \text{و س}} = \frac{3}{2 + \text{و س}} \times 2 + \frac{4}{3 + \text{و س}} \times \frac{1}{2} =$

(ب):

(1) $[\text{و س} \text{جاس} \times (\text{و س} \text{جاس})] = \text{و س} \text{جاس}$

(2) $\text{المقدار} = \left[\frac{2}{3} \cdot \text{و س} \right] \cdot \frac{1}{3} = \text{و س}$

$\frac{2}{3} \text{و س} + \text{ث} =$

(3) $\text{المقدار} = \left[\frac{2\text{هـ س} + 2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}}{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}} \right] \cdot \text{و س}$

$= \frac{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}}{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}} + \text{ث}$

الاختبار الثاني

السؤال الأول:

(1) $\text{و س} = \text{هـ} \Leftarrow \text{المقدار} = \left[\frac{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}}{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}} \right] + \text{ث}$

(2) $\text{و س} = \frac{1}{3} \text{و س}$

(3) $\text{المقدار} = \left[\frac{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}}{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}} \right] + \text{ث}$

(4) $\text{و س} = \text{هـ} \Leftarrow \text{المقدار} = \left[\frac{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}}{2\text{و س} - 2\text{و س} - 2\text{و س}} \right] + \text{ث}$

السؤال الثاني:

(1) $\text{و س} = \frac{1}{2} \text{و س} = \frac{1}{2} \text{و س}$

(2) $\text{و س} = \frac{1}{\pi} \text{و س} = \frac{1}{\pi} \text{و س}$

(3) $\text{و س} = \frac{1}{(2 - \text{و س})} \times \frac{(2 - \text{و س})}{(2 - \text{و س})} \times \frac{(2 - \text{و س})}{(2 - \text{و س})} = \frac{1}{(2 - \text{و س})}$

$= \frac{16 - 2\text{و س}}{(2 - \text{و س})(2 - \text{و س})}$

(ب):

(1) $\text{المقدار} = \text{و س} = 1 + \text{و س} \text{و س} = 2\text{و س}$

$\therefore \text{المقدار} = \text{و س} = 1 + \text{و س} + \text{و س}$

(2) $\text{و س} = \text{و س} = \frac{1}{\text{و س}} \Leftarrow \text{و س} = \frac{1}{\text{و س}}$

$\text{المقدار} = \left[\frac{1}{\text{و س}} \div \left(\frac{1}{\text{و س}} \right) \right] \cdot \text{و س}$

$= 3\text{و س} + \text{و س}$

(3) $\text{و س} = \text{و س} = 1 + \text{و س} \text{و س} = 2\text{و س}$

$\Leftarrow \frac{2\text{و س}}{1 + \text{و س}} = \left[\frac{1}{2} \cdot \text{و س} \right] \cdot \frac{1}{2} = \text{و س} + (1 + \text{و س}) + \text{و س}$

إجابات الوحدة الثالثة:

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

تمارين سلوك الدالة ورسم المنحنيات

المجموعة الأولى

مسائل على تزايد وتناقص الدالة الحقيقية

1] $f(x) = 3x^2 - 3x$ عندما $x = 0$ عند $x = 1$

وبالتعويض في $f(x)$ $x = 0$ ، $x = 1$ ، $x = 2$ النقطة

الدرجة هي $(0, 1)$ ، $(1, 2)$ متزايدة في $[-1, \infty)$

$U, 1, \infty$] ومتناقصة في $[-1, 1]$

2] $f(x) = 2x^2 - 4x$ عندما $x = 0$ عند $x = 2$

$x = 0$ ، $x = 2$ النقطة الدرجة $(2, 4)$ ، متزايدة في

$U, 2, \infty$] ومتناقصة في $[-2, 0]$

3] $f(x) = 3x^2 - 6x$ عندما $x = 0$ عند $x = 2$

النقطة الدرجة هي $(0, 0)$ ، $(2, 4)$ ، متزايدة في

$U, 2, \infty$] ومتناقصة في $[-2, 0]$

4] $f(x) = 0$ عندما $x = 0$ عند $x = 2$ وتكون الدالة

متناقصة في $[-2, 2]$

5] $f(x) = 0$ صفر أو غير معرفة

6] $f(x) < 0$

7] $f(x) > 0$

8] $f(x) = 0$ $\therefore x = 4$ $\therefore x = 16$

9] $f(x) = 2x^2 + 2x$ عندما $x = 0$ عند $x = 1$

10] $f(x) = 2x^2$ عندما $x = 0$ عند $x = 1$

11] $f(x) = 2x^2 - 12x$ عندما $x = 0$ عند $x = 6$

12] $f(x) > 0$

13] $f(x) = 4x^3$ عندما $x = 0$ عند $x = 3$

14] $f(x) = 0$ $\therefore x = 12$ $\therefore x = 4$ $\therefore x = 3$

15] $f(x) = 2$ $\therefore x = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

الدالة متزايدة في \mathbb{R}

16] مجال الدالة هو $[-5, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} (x - 5) = \frac{1}{x^2} (x - 5)$

$\therefore f'(x) < 0$ لكل $x \in [-5, 0)$

$\therefore f(x)$ متزايدة في $[-5, 0)$

17] $f(x) = 3(1 + x)^2$ $\therefore f'(x) < 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$ $\{1 - x\}$ حيث $f'(x) = 0$

$\therefore f(x)$ متزايدة في \mathbb{R} $\{1 - x\}$

18] $f(x) = 3x^2 + 2x$ $\therefore f'(x) < 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore f(x)$ متزايدة في \mathbb{R}

19] $f(x) = 3x^2 - 18x + 27$

$f(x) = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x - 3)^2$

$\therefore f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ حيث $f'(x) = 0$

$\therefore f(x)$ متزايدة في \mathbb{R} $\{3\}$

20] $f(x) = 3 - x$ $\therefore f'(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore f(x)$ متناقصة في \mathbb{R}

21] مجال الدالة هو $[-2, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} (x - 2) = \frac{1}{x^2} (x - 2)$

$\therefore f'(x) > 0$ لكل $x \in [-2, \infty)$

$\therefore f(x)$ متناقصة في $[-2, \infty)$

22] $f(x) = 5x^2 - 3x$ $\therefore f'(x) = 10x - 3$

$\therefore f(x) = 5x^2 - 3x$ $\therefore f'(x) = 10x - 3$ عندما $x = 0$

$f'(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ $\{0\}$

$\therefore f(x)$ متناقصة في \mathbb{R} $\{0\}$

23] $f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$ $\therefore f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^3}$

$\therefore f'(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ $\{2\}$ حيث أنه غير معرف

عند $x = 2$ $\therefore f(x)$ متناقصة في \mathbb{R} $\{2\}$

وحيث أن المقام موجب دائماً إذن إشارة $d'(s)$ هي إشارة البسط وميمنة بالجدول التالي

∞	1	1	∞	s
∞	-	+	-	$d(s)$
∞	-	+	-	$d'(s)$

(i) عندما $s > 1$ يكون $d'(s) > 0$

$\Leftarrow d(s)$ متناقصة في $]-\infty, 1[$

(ii) عندما $s < 1$ يكون $d'(s) < 0$

$\Leftarrow d(s)$ متزايدة في $]-1, 1[$

(iii) عندما $s < 1$ يكون $d'(s) > 0$

$\Leftarrow d(s)$ متناقصة في $]-1, \infty[$

$$\left. \begin{array}{l} s > 1 \\ s < -2 \end{array} \right\} = d'(s) \quad [39]$$

(i) في $]-\infty, 1[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة

(ii) في $]1, \infty[$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة

$$\left. \begin{array}{l} s > 2 \\ s < -2 \end{array} \right\} = d'(s) \quad [40]$$

في $]-\infty, 2[$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة

في $]2, \infty[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة

$$\left. \begin{array}{l} s > -3 \\ s < 5 \end{array} \right\} = d(s) \quad [41]$$

$$\left. \begin{array}{l} s > 1 \\ s < -1 \end{array} \right\} = d'(s) \quad \therefore$$

في $]-\infty, -1[$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة

في $]-1, 2[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة

$$\left. \begin{array}{l} s > 4 \\ s < -5 \end{array} \right\} = d(s) \quad [42]$$

$$\left. \begin{array}{l} s > 1 \\ s < -1 \end{array} \right\} = d'(s) \quad \therefore$$

في $]-\infty, 1[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة

في $]1, \infty[$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة

$$[33] \quad d(s) = (s-1)^2 \quad \text{وهي متصلة في } \mathbb{C}$$

$$d'(s) = \frac{2}{3} (s-1) = \frac{2}{3} (1-s)$$

وهو غير معرف عندما $s = 1$

عندما $s > 1$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة في $]-1, \infty[$

عندما $s < 1$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة في $]-\infty, 1[$

$$[34] \quad d'(s) = \frac{2}{3} (s-1) = \frac{2}{3} (1-s)$$

وهو غير معرف عند $s = 1$

عندما $s > 1$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة في $]-1, \infty[$

عندما $s < 1$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة في $]-\infty, 1[$

$$[35] \quad 9 - 4s = 0 \Rightarrow s = \frac{9}{4} = 2.25$$

أي عندما $s = \frac{9}{4}$ ، $d'(s) = 0$

\therefore مجال الدالة هو $]-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}[$

$$d'(s) = \frac{4s-9}{4s^2-9} = 0 \Rightarrow s = \frac{9}{4}$$

(i) في $]-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}[$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة

(ii) في $]\frac{9}{4}, \infty[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة

$$[36] \quad d'(s) = \frac{4}{3} (s-1) = 0 \Rightarrow s = 1$$

وهو غير معرف عندما $s = 1$

(i) في $]-\infty, 1[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة

$\therefore d(s)$ متزايدة في $]-1, \infty[$

(ii) في $]1, 2[$: $d'(s) > 0 \Leftarrow d(s)$ غير معرف عند

$s = 0 \Leftarrow d(s)$ متناقصة في $]-2, 2[$

(iii) في $]2, \infty[$: $d'(s) < 0 \Leftarrow d(s)$ متزايدة في $]2, \infty[$

$$[37] \quad d'(s) = \frac{5}{(s+2)^2} = 0 \Rightarrow s = -2$$

$d'(s) < 0$ لجميع قيم $s \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$

$\Leftarrow d(s)$ متزايدة في $]-\infty, -2[$ ، ومتناقصة في $]-2, \infty[$

$$[38] \quad d'(s) = \frac{2(1+s)(1-s)}{(1+s)^2} = \frac{2(1-s)}{(1+s)}$$

$$= \frac{2(1-s)(1+s)}{(1+s)^2}$$

٤٩]
$$d'(s) = (s) \text{ حتا } s + 1 - (s) - \text{حا } s$$

$$= \text{حتا } s + \text{حتا } s - 1 - \text{حا } s$$

$$= 2 \text{ حتا } s + \text{حتا } s - 1$$

$$(2 \text{ حتا } s - 1) (s + 1) = 0 \text{ عندما } \text{حا } s = \frac{1}{2}$$

 أ، ١ - ويتحقق ذلك في $[\frac{\pi}{2}, 0]$ عندما $s = \frac{\pi}{2}$ فقط
 في $[\frac{\pi}{2}, 0]$: $d'(s) < 0$ ∴ د (س) متزايدة
 في $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $d'(s) > 0$ ∴ د (س) متناقصة

٥٠]
$$d'(s) = \begin{cases} s^2, & s > 0 \\ \text{صفر}, & 0 \leq s \leq 3 \\ 2, & s < 3 \end{cases}$$

في $[-\infty, 0]$: $d'(s) > 0$ ∴ د (س) متناقصة فيها
 في $[0, 3]$: $d'(s) < 0$ ∴ د (س) متزايدة فيها
 في $[-\infty, 3]$: $d'(s) \geq 0$ ∴ د (س) مطردة التناقص
 في $[0, \infty]$: $d'(s) \leq 0$ ∴ د (س) مطردة التزايد
 لاحظ أن الدالة ثابتة في $[3, 0]$

٥١]
$$d'(s) = \begin{cases} (s-1)^2, & s > 1 \\ \text{صفر}, & 1 \leq s \leq 3 \\ (3-s)^2, & s < 3 \end{cases}$$

(i) في $[-\infty, 1]$: $d'(s) < 0$ ∴ د (س) متزايدة فيها
 (ii) في $[1, 3]$: $d'(s) < 0$ ∴ د (س) متزايدة فيها
 (iii) في $[-\infty, 3]$: $d'(s) \leq 0$ ∴ د (س) مطردة التزايد
 (iv) في $[1, \infty]$: $d'(s) \leq 0$ ∴ د (س) مطردة التزايد
 لاحظ أن الدالة د (س) ثابتة في $[3, 1]$

المجموعة الثانية

مسائل على القيم العظمى والصغرى المحلية

١]
$$3$$

٢]
$$d'(p) = 0, d''(p) > 0, d''(p) < 0$$

٣]
$$d'(s) = \text{حا } s + \text{حا } s - \text{جا } s = \text{صفر}$$

∴ $s = 0$ ، أ، 90° ، د (٠) = ١، د (٩٠) = ٠، ٩٠°

د (π) = -١ ∴ الجواب : $s = \pi$

٤٣]
$$d'(s) = \begin{cases} -3, & s > \frac{3}{2} \\ 1, & s < \frac{3}{2} \end{cases}$$

في $[-\infty, \frac{3}{2}]$: $d'(s) > 0$ ∴ د متناقصة

في $[\frac{3}{2}, \infty]$: $d'(s) < 0$ ∴ د متزايدة

٤٤]
$$d(s) = \begin{cases} -s^3, & s > 0 \\ s^3, & s \leq 0 \end{cases}$$

$$d'(s) = \begin{cases} -3s^2, & s > 0 \\ 3s^2, & s \leq 0 \end{cases}$$

في $[-\infty, 0]$: $d'(s) > 0$ ∴ د متناقصة

في $[0, \infty]$: $d'(s) < 0$ ∴ د متزايدة

٤٥]
$$d'(s) = \begin{cases} (s-1)^2, & s > 2 \\ 2, & s < 2 \end{cases}$$

$d'(s) = 0$ عندما $s = 1$ أي $s = 1$

في $[-\infty, 1]$: $d'(s) < 0$ ∴ د متزايدة في $[-\infty, 0]$

في $[1, \infty]$: $d'(s) > 0$ ∴ د متناقصة

في $[0, \infty]$: $d'(s) < 0$ ∴ د متزايدة

٤٦]
$$d'(s) = \begin{cases} s^2-3, & s > 3 \\ 3-2s, & s < 3 \end{cases}$$

$d'(s) = 0$ عندما $s = 3 - 2s = 0$ أي $s = \frac{3}{2}$

في $[-\infty, \frac{3}{2}]$: $d'(s) < 0$ ∴ د متزايدة

في $[\frac{3}{2}, 3]$: $d'(s) > 0$ ∴ د متناقصة

في $[0, 3]$: $d'(s) < 0$ ∴ د متزايدة

٤٧]
$$d'(s) = 2 \text{ حتا } s = 2 = 0 \text{ عندما } s = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{\pi^3}{2} \leq s = \frac{\pi}{2}$ ، أ، $\frac{\pi^3}{2}$

في كل من الفترتين $[\frac{\pi}{2}, 0]$ ، $[\frac{\pi^3}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ط

$d'(s) < 0$ ∴ د (س) متزايدة

في الفترة $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^3}{2}]$: $d'(s) > 0$ ∴ د (س) متناقصة

٤٨]
$$d'(s) = \pi \text{ قا } \pi \text{ س} \therefore d'(s) < 0$$

لكن $s \in [-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]$ ∴ د (س) متزايدة في هذه الفترة

[٤] في $98 - 99.6 = 0$ صفر عندما $h = 0$

[٥] الصفر

[٦] $0 = 36 + 2 \times 96 \leftarrow 0 = (2)$

$3 = 2 \leftarrow$

[٧] $\frac{\pi}{2} = 0$ جتا $s = 0$ $\therefore s = \frac{\pi}{2}$

\therefore النقطة $(1, \frac{\pi}{2})$

[٨] الصفر

[٩] نقطة حرجة

[١٠] $3 = 0$ (س) $2 = (3 - s)$ صفر عندما $s = 3$

$s = 0$ (س) $2 < 0 \leftarrow$ د (3) $1 =$ صغرى محلية

[١١] $2 = 0$ (س) $4 = 2 - s$ عندما $s = 0 \leftarrow$

$s = 0$ (س) $2 > 0 \leftarrow$ د (2) $9 =$ عظمى محلية.

[١٢] $3 = 0$ (س) $3 = (3 - s)$ د (س) $0 =$ عندما

$s = 3$ ، د (س) $0 < 3$ عندما $s > 3$ ، د (س) $0 < 3$ عندما

$s < 3$ \therefore لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية عند $s = 3$

[١٣] $4 = 0$ (س) $4 = (2 - s)$ د (س) $0 =$ عندما

$2 = 0$ (س) $0 > 2$ عندما $s > 2$ ، د (س) $0 < 2$ عندما

$s < 2 \leftarrow$ د (2) $1 =$ صغرى محلية

[١٤] د متصلة في مجالها وهو $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} -]$

د (س) $\frac{8-s}{2\sqrt{2-4s}} = 0$ ، د (س) $0 =$ عندما $s = 0$ ،

غير معرف عند $s = \frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3} = s \leftarrow s = 0$.

$s = \frac{2}{3} -$ ، $\frac{2}{3} = s$ ، $\frac{2}{3}$ نقط حرجة

د (س) $0 < 0$ عندما $s > 0$ ، د (س) $0 > 0$ عندما $s < 0$ صفر

\leftarrow د (0) $3 =$ قيمة عظمى محلية

د (س) $-\frac{3-s}{2}$ غير معرفة ، د (س) $0 < 0$ عندما $s < \frac{3}{2}$

\leftarrow د (س) $-\frac{3-s}{2} = 0$ صغرى محلية ، د (س) غير معرفة

عندما $s < \frac{3}{2}$ ، د (س) $0 > 0$ عندما $s > \frac{3}{2} \leftarrow$

د (س) $0 = \frac{3}{2}$ صغرى محلية

[١٥] $\frac{1}{3} = 0$ (س) $\frac{1}{3} = (1 - s)$

$\frac{1}{\sqrt{3}(1-s)} =$

د (س) غير معرف عندما $s = 1 \leftarrow (0, 1)$ نقطة حرجة ،

د (س) $0 < 0$ عندما $s > 1$ ، د (س) $0 < 0$ عندما $s < 1$

\therefore لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية عند $s = 1$

[١٦] $\frac{1}{2-s\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = 0$ (س) $\frac{2}{3} = (2 - s)$

د (س) غير معرف عندما $s = 2$

$\leftarrow (0, 2)$ نقطة حرجة

د (س) $0 > 0$ عندما $s > 2$ ، د (س) $0 < 0$ عندما $s < 2$

\therefore د (2) $0 =$ قيمة صغرى محلية.

[١٧] $\frac{1}{3} = 0$ (س) $\frac{2}{3} = (s + 4)$

$\frac{2-s}{s+4\sqrt{3}} =$ وهو غير معرف عند $s = -4$

$\leftarrow (3, 4)$ نقطة حرجة ،

د (س) $0 < 0$ عندما $s > 4$ ،

د (س) $0 > 0$ عندما $s < 4$

\leftarrow د (4) $3 =$ قيمة عظمى محلية

[١٨] $6 = 0$ (س) $6 = 6 - s$ $6 = (1 - s)$

$=$ صفر عند النفط الحرجة $\therefore s = 0$ ، $s = 1$

د (س) $12 = 6 - s$ ومنها

د (س) $0 = (0)$ $6 = (0)$ (سالب) \leftarrow د (0) $2 =$ عظمى محلية

د (س) $6 = (1)$ (موجب) \leftarrow د (1) $1 =$ صغرى محلية

[١٩] $6 = 0$ (س) $6 = 12 + s$ $18 =$ صفر عند النقط

الحرجة $\therefore 6 = (3 + s)$ $1 = (1 - s)$ صفر

$\therefore s = 3$ ، $s = 1$ ، د (س) $12 = 12 + s$

د (س) $0 = (3)$ (سالب) \leftarrow د (3) $6 =$ ع محلية

د (س) $0 = (1)$ (موجب) \leftarrow د (1) $4 =$ ص محلية

$$[28] \quad \frac{d}{ds} = \frac{(s-1)(s+1)12}{(s^2+s-1)^2} = \text{صفر}$$

عندما $s = 1$ ، $s = -1$ ، $s = 1$

$\therefore \frac{d}{ds} (s) > 0$ قبل $s = -1$ ، $\frac{d}{ds} (s) < 0$ بعدها

$\therefore \frac{d}{ds} (s) = 1$ هي قيمة صغرى محلية

$\therefore \frac{d}{ds} (s) < 0$ قبل $s = 1$ ، $\frac{d}{ds} (s) > 0$ بعدها

$\therefore \frac{d}{ds} (s) = 3$ هي قيمة عظمى محلية

$$[29] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} = 2- \\ \frac{d}{ds} = 3 \end{array} \right\} = \text{صفر}$$

عندما $s = 0$

$$2- = \frac{0-52-0}{5} = \frac{(0)s-(5+0)s}{5}$$

$$3 = \frac{0-0+53}{5} = \frac{(0)s-(5+0)s}{5}$$

\therefore د غير قابلة للاشتقاق عند $s = 0$

$\therefore (0, 0)$ نقطة حرجة

$\frac{d}{ds} (s) > 0$ عندما $s > 0$ ، $\frac{d}{ds} (s) < 0$ عندما $s < 0$

$\therefore \frac{d}{ds} (s) = 0$ هي قيمة صغرى محلية

$$[30] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} = 3 \\ \frac{d}{ds} = 1- \end{array} \right\} = \text{صفر}$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 3 = 3 = \frac{d}{ds} (s) = 1- = 1-$$

\therefore د (س) غير قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

$\therefore (1, 1)$ نقطة حرجة ، $\frac{d}{ds} (s) < 0$ عندما $s > 1$

$\frac{d}{ds} (s) > 0$ عندما $s < 1$ ، $\therefore \frac{d}{ds} (s) = 1- = 1-$

$$[31] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} = 2- \\ \frac{d}{ds} = 2- \end{array} \right\} = \text{صفر}$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 2- = 2- = \frac{d}{ds} (s) = 2- = 2-$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 2 = 2 = \frac{d}{ds} (s) = 2 = 2$$

\therefore د (س) غير قابلة للاشتقاق عند $s = 2$ صفر

$\therefore (2, 3)$ نقطة حرجة

$\therefore \frac{d}{ds} (s) > 0$ عندما $s > 2$ ، $\frac{d}{ds} (s) < 0$ عندما

$s < 2$ ، $\therefore \frac{d}{ds} (s) = 3$ هي قيمة صغرى محلية

$$[32] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} = 2- \\ \frac{d}{ds} = 2- \end{array} \right\} = \text{صفر}$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 2- = 2- = \frac{d}{ds} (s) = 2- = 2-$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 2- = 2- = \frac{d}{ds} (s) = 2- = 2-$$

\therefore د (س) غير قابلة للاشتقاق عند $s = 2$

$\therefore (2, 2)$ نقطة حرجة

$\therefore \frac{d}{ds} (s) < 0$ عندما $s > 2$ ، $\frac{d}{ds} (s) > 0$ عندما

$s < 2$ ، $\therefore \frac{d}{ds} (s) = 2$ هي قيمة عظمى محلية

$$[33] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} = 1 \\ \frac{d}{ds} = (1-s)2 \end{array} \right\} = \text{صفر}$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 1 = 1 = \frac{d}{ds} (s) = 1 = 1$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 1- = 1- = \frac{d}{ds} (s) = 1- = 1-$$

\therefore د (س) غير قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

$\therefore (1, 3)$ نقطة حرجة

$\therefore \frac{d}{ds} (s) < 0$ عندما $s > 1$ ، $\frac{d}{ds} (s) > 0$ عندما

$s < 1$ مباشرة $\therefore \frac{d}{ds} (s) = 3 = 3$ هي قيمة عظمى محلية

(ii) $\frac{d}{ds} (s) = 0$ عندما $s = 2$ ، $s = 2$ أي عندما

$s = 1$

$\frac{d}{ds} (s) > 0$ عندما $s > 1$ مباشرة ، $\frac{d}{ds} (s) < 0$ عندما

$s < 1$ ، $\therefore \frac{d}{ds} (s) = 1$ هي قيمة صغرى محلية

$$[34] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} = 2- \\ \frac{d}{ds} = 2 \end{array} \right\} = \text{صفر}$$

$$\frac{d}{ds} (s) = 2- = 2- = \frac{d}{ds} (s) = 2- = 2-$$

$$2 = 2 = \frac{d}{ds} (s) = 2 = 2$$

\therefore د (س) غير قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

∴ (١، ٢) نقطة حرجية

∴ د' (١) > ٠ عندما م > ١، د' (٢) < ٠ عندما م < ١
 م < ١ ∴ د' (١) = ٢ - ١ = ١ هي قيمة صغرى محلية
 (ii) د' (٢) = ٠ عندما م = ٢ - ١ = ١ أي عندما م = ٢
 ∴ د' (٢) < ٠ عندما م > ٢، د' (٢) > ٠ عندما م < ٢
 م > ١ ∴ د' (٢) = ٧ هي قيمة عظمى محلية

[٣٥]

$$\left. \begin{array}{l} ٣ - ٢ - م = ٠ - ٢ - م = ٢ - م \\ ٣ > م \end{array} \right\} = د' (١)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - م \\ ٣ < م \end{array} \right\} = د' (٢)$$

$$٢ = (-\frac{٣}{٢})'، ٢ = (\frac{٣}{٢})'$$

∴ د (١) غير قابلة للاشتقاق

عند م = $\frac{٣}{٢}$ ∴ $(\frac{٣}{٢}, ٠)$ هي نقطة حرجية

د' (١) > ٠ عندما م > $\frac{٣}{٢}$ ، د' (١) < ٠ عندما م < $\frac{٣}{٢}$

∴ د' ($\frac{٣}{٢}$) = ٠ هي قيمة صغرى محلية

[٣٦]

$$\left. \begin{array}{l} ٨ - ٢ + م = ٠ - ٢ + م = ٢ + م \\ ٥ > م \end{array} \right\} = د' (١)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - م \\ ٥ < م \end{array} \right\} = د' (٢)$$

$$٢ = (-\frac{٥}{٢})'، ٢ = (\frac{٥}{٢})'$$

للاشتقاق عند م = $\frac{٥}{٢}$ ∴ $(\frac{٥}{٢}, ٨)$ هي نقطة حرجية

د' (١) < ٠ عندما م < $\frac{٥}{٢}$ ، د' (١) > ٠ عندما م > $\frac{٥}{٢}$

∴ د' ($\frac{٥}{٢}$) = ٨ هي قيمة عظمى محلية

$$\left. \begin{array}{l} ٣ - م \\ ٥ > م \end{array} \right\} = د' (١)$$

$$٣ = (-٢)'، ٣ = (٢)'$$

هي نقطة حرجية، د' (١) = ٠، د' (١) = ٣ - ٠ = ٣

∴ م = ٥ هي نقطة حرجية، د' (١) = ٥

(i) عند م = ٢ ∴ د' (١) < ٠ عندما م > ٢،

د' (١) = ٠ عندما م = ٢ ∴ د' (١) > ٠ عندما م < ٢

∴ د' (٢) = ٤ هي قيمة عظمى محلية

(ii) د' (١) = ٥ = صفر عندما م > ٥، د' (١) < ٥

عندما م < ٥

∴ د' (٥) = ٤ هي قيمة عظمى محلية

كل م ∈ [٢، ٥] ∴ د' (١) = ٠ قبلها وبعدها د' (١) = ٤

يعتبر قيمة عظمى أو صغرى محلية لكل منها

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - م \\ ٢ < م \end{array} \right\} = د' (١)$$

$$٠ = (-٠)'، ٠ = (٠)'$$

قابلة للاشتقاق عند م = ٠ ولكن د' (٠) = ٠

∴ م = ٠ نقطة حرجية وكذلك كل م ∈ [٠، ٢] هي

نقطة حرجية، د' (١) = ٠، د' (١) = ٢ = ٢

∴ م = ٢ أيضاً هي نقطة حرجية

(i) د' (١) > ٠ عندما م > ٠، د' (١) < ٠ عندما م < ٠

∴ د' (٠) = ٣ هي قيمة صغرى محلية

(ii) د' (١) = ٠ عندما م > ٢، د' (١) < ٠ عندما م < ٢

∴ د' (٢) = ٣ هي قيمة صغرى محلية

(iii) د' (١) = ٠ قبل وبعد كل م ∈ [٠، ٢]

∴ د (١) لكل منها يعتبر قيمة عظمى أو صغرى محلية

∴ س = 3 نقطة حرجة ، د' (س) > 0 عندما س > 3
مباشرة

د' (س) > 0 عندما س < 3 مباشرة

∴ د (3) = 0 صغرى محلية

(ثانياً) د' (س) = 0 عندما س = 3 (س - 2) = 0

∴ س = 0 ، س = 2 نقط حرجة

د' (س) > 0 قبل س = 0 ، د' (س) < 0 بعدها

∴ د (0) = 0 صغرى محلية

د' (س) < 0 قبل س = 2 مباشرة ، د' (س) > 0 بعدها

∴ د (2) = 4 هي قيمة عظمى محلية

$$[42] \quad \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4)$$

$$= \frac{(س - 2)(س - 4)}{3} \quad \text{وهو غير معرف عندما } س = 2$$

س = 0 ، س = 2 ، د' (س) = 0 عندما س = 2

(i) عندما س = 0 : د' (س) > 0 قبل وبعد س = 0

(ii) وعندما س = 2 : د' (س) < 0 قبل وبعد س = 2

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية عندهما

(iii) عندما س = 2 : د' (س) = 0

∴ د' (س) > 0 عندما س > 2 ، د' (س) < 0 عندما س < 2
مباشرة

∴ د (2) = 4 هي قيمة صغرى محلية

$$[43] \quad \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) + \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4)$$

$$= \frac{(س - 2)(س - 4)}{3} + \frac{(س - 2)(س - 4)}{3} = \frac{(س - 2)(س - 4)}{3}$$

وهو غير معرف عندما س = 2 ، د' (س) = 0

عندما س = 2 ، د' (س) = 0 ، س = 2 ، د' (س) = 0

(i) عندما س = 0 : د' (س) < 0 قبل وبعد س = 0
مباشرة

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى عندها

$$[39] \quad \left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \\ \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \\ \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \end{array} \right\}$$

بالبحث نجد أن د قابلة للاشتقاق عند س = 0 ولكن

د' (0) = 0 ، د' (0) = 0 نقطة حرجة

∴ د' (س) > 0 عندما س > 0 ، د' (س) < 0 عندما س < 0

∴ د (0) = 0 هي قيمة صغرى محلية

$$[40] \quad \left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \\ \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \\ \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \end{array} \right\}$$

$$\text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) = 0 \Rightarrow س = 2 \text{ ، } س = 4$$

∴ د (س) غير قابلة للاشتقاق عند س = 0

∴ (0 ، 0) هي نقطة حرجة

∴ د' (س) > 0 عندما س > 0 ، د' (س) < 0 عندما س < 0

∴ د (0) = 0 هي قيمة صغرى محلية

$$(ii) \quad \text{د' (س)} = 0 \text{ عندما } س = 2 \text{ ، } س = 4 \text{ أي عندما س} = \frac{2}{3}$$

د' (س) < 0 عندما س > 2 ، د' (س) > 0 عندما س < 2

∴ د' (س) > 0 ، د' (س) = 0 ، د' (س) < 0 هي قيمة عظمى محلية

$$[41] \quad \left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \\ \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \\ \text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) \end{array} \right\}$$

$$\text{أولاً) د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) = 0 \Rightarrow س = 2 \text{ ، } س = 4$$

$$\text{د' (س)} = \frac{1}{3} (س - 2) (س - 4) = 0 \Rightarrow س = 2 \text{ ، } س = 4$$

∴ د (س) غير قابلة للاشتقاق عند س = 3

(ii) عندما $s = \frac{2}{y}$: $d'(s) < 0$ عندما

$$s > \frac{2}{y}$$

$$d'(s) > 0 \text{ عندما } s > \frac{2}{y}$$

$\therefore d(\frac{2}{y})$ هي قيمة عظمى محلية.

$$\text{عندما } s = 2 : d'(s) > 0$$

$$\text{عندما } s > 2 : d'(s) < 0 \text{ عند } s = 2$$

\therefore توجد قيمة صغرى محلية عند $(0, 2)$

[44] مجال الدالة d هو الفترة $[-2, 2]$

$$d'(s) = (s-8)^{\frac{1}{3}} + s \times \frac{1}{4} (s-8)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x = s^2$$

$$= (s-8)^{\frac{1}{3}} (s^2 - 8s) = \frac{(s-8)^{\frac{1}{3}} (s-2)(s+2)}{s-8}$$

$$d'(s) = 0 \text{ عندما } s = 2, s = -2$$

$$d'(s) \text{ غير معرف عندما } s = -2, s = 2$$

$$\therefore d'(s) > 0 \text{ عندما } s > -2, d'(s) < 0 \text{ عندما } s < -2$$

$$s < -2 : d'(s) < 0 \therefore d(-2) = -4 \text{ قيمة صغرى محلية.}$$

$$\therefore d'(s) < 0 \text{ عندما } s > 2$$

$$d'(s) > 0 \text{ عندما } s < 2$$

$$\therefore d(2) = 4 \text{ قيمة عظمى محلية.}$$

$$d'(s) \text{ غير معرف عندما } s > -2, s = 2$$

$$d'(s) > 0 \text{ عندما } s < -2$$

$$\therefore d(-2) = -4 \text{ قيمة عظمى محلية}$$

$$d'(s) > 0 \text{ عندما } s > 2, \text{ غير معرف بعدها}$$

$$\therefore d(2) = 4 \text{ صغرى محلية}$$

[45] $d(s) = s^2 - 2s + 1$ عندما $s = 1$

$$s = 1 \text{ فقط في } [0, \frac{1}{2}]$$

$$d'(s) < 0 \text{ عندما } s > \frac{1}{2}, d'(s) > 0 \text{ عندما } s < \frac{1}{2}$$

$$\therefore d(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ قيمة عظمى محلية}$$

[46] $d'(s) = s^2 - 2s + 1$ عندما $s = 1$

$$\text{أي حتماً } s = 1 \text{ في } [0, \frac{1}{2}] : \text{ حتماً } s = \frac{1}{2} \text{ فقط}$$

$$\text{أي } s = \frac{1}{2}, d'(s) < 0 \text{ عندما } s > \frac{1}{2}$$

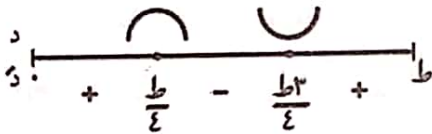
$$d'(s) > 0 \text{ عندما } s < \frac{1}{2} \therefore d(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ قيمة عظمى محلية}$$

[47] $d'(s) = s^2 - 2s + 1$

$$= (s-1)^2 \text{ حتماً } s = 1$$

$$\text{عندما } s = 1 : \text{ أي } s = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

$$d'(s) < 0 \text{ عندما } s > \frac{1}{2}, d'(s) > 0$$



$$\text{عندما } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$$

$$\therefore d(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \text{ قيمة عظمى محلية}$$

$$d'(s) > 0 \text{ عندما } s > \frac{3}{4}$$

$$d'(s) < 0 \text{ عندما } s < \frac{3}{4}$$

$$\therefore d(\frac{3}{4}) = \frac{3}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16} \text{ صغرى محلية}$$

[48] $d(s) = s^2 + p + s + 1$ عندما $s = 1$

$$d'(s) = s^2 + p + s + 1$$

$$\therefore d(1) = 1 + p + 1 + 1 = 3 + p$$

$$3 \dots (3)$$

$$\therefore s = 1 \text{ نقطة حرجة} \therefore d(1) = 3 + p$$

$$\therefore p + 1 = 0 \therefore p = -1$$

$$\therefore p = 0, \therefore d(1) = 3$$

\therefore توجد قيمة صغرى محلية عند $(1, 3)$

[49] $d(s) = s^2 + p + s + 1$ عندما $s = 1$

$$d'(s) = s^2 + p + s + 1 = 0 \text{ صفر عندما } s = 1$$

$$\therefore p = -1, \therefore p = 0 \text{ ومن (1)}$$

$$د (0) = 3، د (2) = 1 -، د (4) = 3، د (5) = 0.$$

$$\therefore د (2) = 1 - \text{ قيمة صغرى مطلقة،}$$

$$د (0) = د (4) = 3 \text{ قيمة عظمى مطلقة}$$

$$\boxed{15} \quad \left. \begin{array}{l} 2 > س، 2-2- \\ 1 < س، 1 \end{array} \right\} = د (س)$$

$$د (1) = 4 - \neq د (1) = 1 \therefore \text{ نقطة حرجة}$$

$$د (س) = 0 \text{ عند } 1 - \therefore \text{ هي نقطة حرجة}$$

$$\therefore د (4) = 0 -، د (1) = 4، د (1) = 0.$$

$$د (3) = 2، \therefore د (4) = 0 -، د (5) = 0 \text{ قيمة ص. مطلقة}$$

$$د (1) = 4 \text{ قيمة عظمى مطلقة.}$$

$$\boxed{16} \quad \left. \begin{array}{l} 2 > س، 2-2- \\ 2 < س، 2-2- \end{array} \right\} = د (س)$$

$$د (2) = 4 - \neq د (2) = 3 - \therefore \text{ نقطة حرجة}$$

$$\text{نقطة حرجة، د (س) = 0 عند } \frac{3}{2} = س، 0 =$$

$$د (2) = 0، د (2) = 0، د (2) = \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$د (0) = 4، د (5) = 0.$$

$$\therefore \text{ الصغرى المطلقة } = \frac{9}{4}$$

$$\text{، القيمة العظمى المطلقة } = 4$$

$$\boxed{17} \quad \left. \begin{array}{l} 2 > س، 2-1-1-2- \\ 2 < س، 3-1-2-2- \end{array} \right\} = د (س)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 > س، 1- \\ 2 < س، 1 \end{array} \right\} = د (س)$$

$$د (2) = 2 \text{ نقطة حرجة}$$

$$د (0) = 1، د (2) = 1 -، د (5) = 2$$

$$\therefore د (2) = 1 - \text{ صغرى مطلقة، د (5) = 2 عظمى مطلقة}$$

[18]

$$\left. \begin{array}{l} 1 > س، 4+2=1+2+3 \\ 1 < س، 2-2=1-2-2- \end{array} \right\} = د (س)$$

$$\boxed{11} \quad د (س) = 2 \times \sqrt{2-9} + \frac{2-2}{2-9} \times 2 =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} = \text{صفر عندما } 2-9 = 0$$

$$س = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = 0 \therefore \text{ لذا نقارن}$$

$$د (0) = 0، د (2) = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right) = 9 \text{ صفر}$$

$$\therefore د (0) = د (3) = 0 \text{ قيمة صغرى مطلقة،}$$

$$د (2) = 9 \text{ هي قيمة عظمى مطلقة.}$$

$$\boxed{12} \quad د (س) = (1+س)^{-1} (1-س)^{\frac{1}{2}}$$

$$د (س) = (1+س)^{-1} (1-س)^{\frac{1}{2}} + (1+س)^{-2} (1-س)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} (1-س)^{\frac{1}{2}} (1+س)^{-2} [1+س+3+س^2-]$$

$$= \frac{(2-س)^2}{3(1-س)^{\frac{3}{2}} (1+س)^3} = \text{صفر عند } 2 =$$

$$1-، \therefore [9، 0]، \text{ غير معرف عند } 1 \text{ لذا نوجد}$$

$$د (0) = 1 -، د (2) = \frac{1}{3}، د (9) = \frac{1}{0} \therefore د (0) = 1 -$$

$$\text{صغرى مطلقة، د (2) = } \frac{1}{3} \text{ عظمى مطلقة.}$$

$$\boxed{13} \quad د (س) = \frac{2}{3} س + \frac{1}{3} (4-س)^2 \times$$

$$= \frac{2}{3} (4-س)^2 = \frac{2}{3} (س^2 - 8س + 16)$$

$$= \frac{2}{3} (س^2 - 8س + 16) = \frac{2}{3} (س-4)^2 \therefore \text{ عند } 4 = س، 4 =$$

$$\text{معرف عند } 0، \therefore \text{ لذا نوجد د (1) = 0، د (0) = 0،}$$

$$د (1) = 9، د (4) = 0، د (8) = 64، د (0) = 0، د (4) = 0$$

$$= \text{قيمة صغرى مطلقة، د (8) = 64 قيمة عظمى مطلقة.}$$

$$\boxed{14} \quad \left. \begin{array}{l} 4 > س، 4-2- \\ 4 < س، 3- \end{array} \right\} = د (س)$$

$$د (4) = 4 \neq د (4) = 3 \therefore \text{ نقطة حرجة، د (س) = 0}$$

$$\therefore \text{ عند } 2 = س \text{ نقطة حرجة.}$$

[٢١] نفرض أن العدد هو س

$$\therefore \text{د (س)} = \text{س} + \text{س}^{-1}$$

$$\therefore \text{د' (س)} = 1 - \text{س}^{-2} = \frac{1 - \text{س}^{-2}}{\text{س}^2} = \frac{(1 - \text{س})(1 + \text{س})}{\text{س}^2}$$

$$\text{د' (س)} = 0 \text{ عندما } \text{س} = 1 \text{ ، } 1 - \text{س}^{-2} = 0 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{د' (س)} = 2 - \text{س}^{-3} = \frac{2 - \text{س}^{-3}}{\text{س}^3} = 0 \text{ عندما } \text{س} = 1$$

$$\therefore \text{د (س)} \text{ قيمة صغرى عندما } \text{س} = 1 \text{ ، د (1) = 1 + 1 = 2}$$

[٢٢] نفرض أن العددين هما س ، $\frac{16}{\text{س}}$

$$\therefore \text{م} = \text{س} + \frac{16}{\text{س}} = \frac{\text{س}^2 + 16}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{س} \times \text{س}^3 - \text{س}^2 \times 16}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}^4 - 16\text{س}^2}{\text{س}^2}$$

$$= \text{صفر عندما تكون م أقل ما يمكن}$$

$$\therefore \text{د' (س)} = 16 - \text{س}^2 = 0 \therefore \text{س} = 4$$

$$\therefore \text{س} = 4 \therefore \text{العددان هما 4 ، } \frac{16}{4} = 4$$

[٢٣] ص = 10 - س ، م = 3(10 - س)

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{3(10 - \text{س})}{\text{س}} = \frac{30 - 3\text{س}}{\text{س}} = \frac{30}{\text{س}} - 3$$

$$\text{د' (س)} = \frac{30}{\text{س}} - 3 = 0 \text{ عندما } \text{س} = 10$$

$$= \text{صفر عندما تكون م أكبر ما يمكن}$$

$$\therefore \text{س} = 10 \therefore \text{د' (10) = 3 - 3 = 0}$$

$$\therefore \text{ص} = 10 \therefore \text{د' (10) = 3 - 3 = 0}$$

$$\therefore \text{م} \text{ تكون أكبر ما يمكن عندما } \text{س} = 10 \therefore \text{ص} = 10$$

$$\therefore \text{م} = 3(10 - 10) = 0 \therefore \text{د' (10) = 3 - 3 = 0}$$

[٢٤] نفرض أن طول الجزأين (15 - س) ، س

$$\therefore \text{م} = (15 - \text{س}) + \text{س} = 15$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{15}{\text{س}} = \frac{15}{15} = 1 \text{ عندما } \text{س} = 15$$

$$\text{م} \text{ أقل ما يمكن } \therefore \text{س} = 15 \therefore \text{م} = 15$$

$$\therefore \text{د' (س)} = \frac{15}{\text{س}} = \frac{15}{15} = 1 \text{ عندما } \text{س} = 15$$

$$\therefore \text{س} = \frac{3}{4} \text{ والجزء الآخر } = 15 - \frac{3}{4} = 14 \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} > \frac{1}{2} \\ \text{س} < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{د' (س)} = \left(\frac{1}{2} - \text{س} \right) \neq \left(\text{س} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{2} \text{ نقطة حرجة}$$

$$\text{د' (س)} = (3 - \text{س}) = 2 \therefore \text{د' (2) = 1}$$

$$\therefore \text{ص} = 2 - \text{س} = 0 \text{ عندما } \text{س} = 2 \therefore \text{د' (2) = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} > 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\text{د' (س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} > 3 \\ \text{س} < 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{د' (س)} = (3 - \text{س}) = 6 \therefore \text{د' (6) = 3}$$

$$\text{د' (س)} = 0 \text{ عندما } \text{س} = 3 \therefore \text{د' (3) = 0}$$

$$\text{د' (س)} = \left(\frac{3}{2} - \text{س} \right) = 0 \therefore \text{د' (1.5) = 0}$$

$$\therefore \text{ص} = 0 \text{ صغرى مطلقة ، ص} = 8 \text{ عظمى مطلقة}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د' (س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} > 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\text{د' (س)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{س} > 3 \\ \text{س} < 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{د' (س)} = (3 - \text{س}) = 0 \therefore \text{د' (3) = 0}$$

$$\text{ولكن د' (0) = صفر عندما } \text{س} = 3 \therefore \text{د' (3) = 0}$$

$$\therefore \text{د' (س)} = (3 - \text{س}) = 6 \therefore \text{د' (6) = 3}$$

$$\text{د' (س)} = 0 \therefore \text{الصغرى المطلقة} = 1$$

$$\text{العظمى المطلقة} = 7$$

المجموعة الرابعة :

مسائل على تطبيقات القيم العظمى والصغرى

[١] نفرض أن العددين س ، 12 - س ، حاصل ضربهما

$$\text{م} = \text{س} (12 - \text{س}) = 12\text{س} - \text{س}^2$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{س}} = 12 - \text{س} = 0 \text{ عندما } \text{س} = 12 \therefore \text{قيمة عظمى}$$

$$\therefore \text{س} = 6 \therefore \text{العددان هما 6 ، 6}$$

١٧] بفرض طول قوس القطاع ل ونصف قطر دائرته نوه

$$\therefore \text{ل} + \text{نوه} = ٤٨ \therefore \text{ل} = ٤٨ - \text{نوه}^2$$

$$\therefore \text{مساحة اقطاع هي م} = \frac{1}{2} \text{ل} \text{نوه}$$

$$= \frac{1}{2} \text{نوه} (٤٨ - \text{نوه}) \therefore \text{م} = ٢٤ \text{نوه} - \frac{1}{2} \text{نوه}^2$$

$$\therefore \frac{٢٤}{\text{نوه}} - ٢ = ٠ \therefore \text{نوه} = ١٢ \text{سم}$$

عندما م تكون أكبر ما يمكن ومنها نوه = ١٢ سم

$$\therefore \frac{٢٤}{\text{نوه}} > ٠ \text{ أي م قيمة عظمى}$$

١٨] الجزء الأول = س والثاني = ٦٠ - س،

$$\text{(الطول + العرض) للجزء الأول} = \frac{1}{3} \text{س}$$

$$\therefore \text{الطول} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \text{س} = \frac{٢}{٩} \text{س} \text{، العرض} = \frac{٢}{٩} \text{س}$$

$$\text{وللجزء الثاني: الطول} = \frac{٦٠ - \text{س}}{٣} \text{، العرض} = \frac{٦٠ - \text{س}}{٣}$$

$$\therefore \text{مجموع المساحتين} = \text{م} = \frac{٢}{٩} \text{س} + \frac{٢}{٩} (٦٠ - \text{س})$$

$$\therefore \text{م} = \frac{1}{9} \text{س} - \frac{٢}{9} \text{س} + ٢٠ = ٢٠ - \frac{1}{9} \text{س}$$

$$\therefore \frac{٢٠}{9} - \frac{1}{9} \text{س} = ٠ \therefore \text{س} = ٢٠$$

عندما تكون م أصغر ما يمكن

ومنها س = ٣٠. بعدى المستطيل ١٠، ٥ سم

١٩] نفرض أن طول ضلع المربع ل ونصف قطر الدائرة

$$\text{نوه} \therefore \text{ل} + ٢ \text{ط} = \text{نوه} = ٦٤ \text{ ومنها}$$

$$\text{ل} = \frac{1}{4} (٣٢ - \text{ط}) \therefore \text{مجموع المساحتين} =$$

$$\text{م} = \text{ل} + \text{ط} = \frac{1}{4} (٣٢ - \text{ط}) + \text{ط} = ٨ + \frac{٣}{٤} \text{ط}$$

$$= ٢٥٦ - ١٦ \text{ط} + \frac{٣}{٤} \text{ط} = ٢٥٦ - \frac{١٣}{٤} \text{ط}$$

$$\therefore \frac{٢٥٦}{13} - \text{ط} = ٠ \therefore \text{ط} = ١٩ \text{ ومنها}$$

= صفر عندما تكون م أصغر ما يمكن ومنها

$$\text{نوه} = \frac{٣٢}{٤ + \text{ط}} \text{ وبالتعويض عن نوه}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{1}{4} \left(\frac{٣٢}{٤ + \text{ط}} - ٣٢ \right) = \frac{٦٤}{٤ + \text{ط}}$$

١٣] نفرض أن المكسب الكلي هو م

$$\therefore \text{م} = ١٠٠ \text{س} + ٢ \times ١٠٠ \text{ص} + ١ \times ٢٠٠ = ٢٠٠ + ١٠٠ \text{س} + ٢٠٠ \text{ص}$$

$$\frac{١٠٠ (٣٢ - ٨ - ٥ \text{س})}{٥ - \text{س}}$$

$$\therefore \frac{٢٤}{٥ - \text{س}} = ٢٠٠ + ١٠٠ \text{س} + ٢٠٠ \text{ص} = ١ - \frac{١ - \text{س} (٣٢ - ٨ - ٥ \text{س})}{٥ - \text{س}}$$

$$= ٢٠٠ - \frac{٨٠٠}{٥ - \text{س}} = ٠ \text{ صفر عندما تكون م أكبر ما يمكن}$$

$$\therefore \frac{٨٠٠}{٥ - \text{س}} = ٢٠٠ \therefore \text{س} = ٥$$

$$\therefore \text{س} = ٥ \therefore \text{س} = ٣$$

$$\text{والجواب الآخر مرفوض لأنه} < ٤ \therefore \text{ص} = \frac{٢٤ - ٣٢}{٢}$$

= ٤ وعوض

١٤] نصف محيط المستطيل = ١٠٠ سم

وبفرض طول المستطيل س عرضه = ١٠٠ - س

$$\therefore \text{مساحته} = \text{م} = \text{س} (١٠٠ - \text{س}) = ١٠٠ \text{س} - \text{س}^2$$

$$\therefore \frac{٢٤}{\text{س}} - ١٠٠ + \text{س} = ٠ \text{ عندما تكون م أكبر}$$

ما يمكن ومنها س = ٥٠ وعندما م = ٥٠ × ٥٠ سم

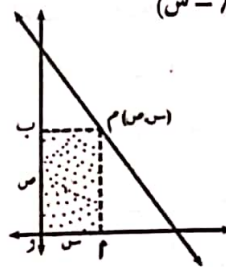
١٥] ح = س = ص = ٣ (س - ٨)

$$\therefore \text{ح} = ٣ - \text{س} = ٣ - ٢٤ = -٢١$$

$$\therefore \frac{٢٤}{\text{س}} = ٢٤ - ٦ = ١٨ \therefore \text{س} = ١٨$$

عندما تكون ح أكبر ما يمكن

$$\therefore \text{س} = ٤ \therefore \frac{٢٤}{٤} > ٠$$



١٦] نفرض أن طول ب = س،

طول ب ج = ص، المساحة م

$$\therefore \text{س} + ٤ = ٢٠٠ \therefore \text{س} = ١٩٦$$

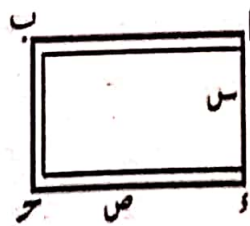
$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{4} (٢٠٠ - \text{س})$$

$$\therefore \text{م} = \frac{1}{4} \text{س} (٢٠٠ - \text{س})$$

$$\therefore \text{أي م} = ٥٠ - \frac{٣}{٤} \text{س} = ٠ \therefore \frac{٢٤}{\text{س}} - ٥٠ = ٠ \therefore \text{س} = ٢٤$$

$$\therefore \text{عند القيمة العظمى} \therefore \text{س} = \frac{١٠٠}{٣} = ٣٣ \therefore \frac{٢٤}{٣} > ٠$$

$$\therefore \text{م} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} (١٠٠ - ٢٠٠) = -\frac{٢٥٠}{١٢} \text{ سم}$$

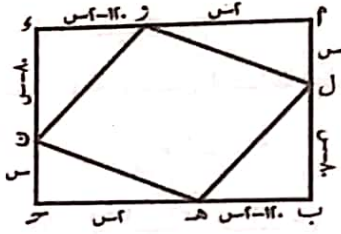


$$\therefore م = ٤٨ + ٤س - \frac{١}{٣}س^٢$$

$$\therefore \frac{٢٥}{٥س} = ٤ - س = ٠$$

عندما تكون م أكبر ما يمكن $\therefore س = ٤$ سم

مساحة متوازي الاضلاع [٢٣]



مساحة المستطيل =

٤ مثلثات =

$$م = \frac{١}{٢} \times ٨٠ \times ١٢٠ = ٤٨٠٠$$

$$٢ \times س \times س \times ٢$$

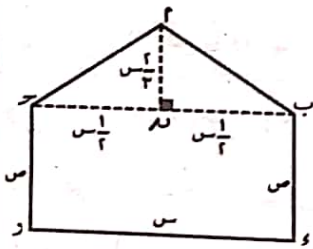
$$- \frac{١}{٢} (٢٠ - ٨٠) (٢٠ - ١٢٠) = ٢ \times (س - ٨٠) (س - ١٢٠)$$

$$\therefore م = ٢٨٠ - س = ٤$$

$$\therefore \frac{٢٥}{٥س} = ٨ - ٢٨٠ = ٠ \text{ عند القيمي العظمى}$$

ومنها س = ٣٥ سم

بفرض الضلع ب ج = س، ب ه = ص [٢٤]



$$\therefore م = \frac{٢}{٣} س$$

$$ب = \frac{١}{٣} س$$

$$(ب م)$$

$$= (س \frac{١}{٣}) + (س \frac{٢}{٣})$$

$$= \frac{٢٥}{٣٦} س \therefore م = \frac{٥}{٦} س = ٢$$

$$\therefore \text{محيط النافذة} = ٢ ص + س + ٢ = ٣٠٠$$

$$\therefore م = ١٥٠ - \frac{٤}{٣} س$$

$$\therefore م = س ص + س \frac{١}{٣} + س \frac{٢}{٣}$$

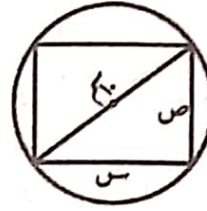
$$\therefore م = س (س \frac{٤}{٣} - ١٥٠) + س \frac{١}{٣} = ١٥٠ - س$$

$$\therefore \frac{٢٥}{٥س} = ١٥٠ - س = ٠$$

عندما تكون م أكبر ما يمكن أي س = ٧٥ سم

$$\therefore ص = \frac{٢}{٣} \times ٧٥ = ٥٠$$

نفرض أن طول المستطيل س، عرضه ص



قطر المستطيل

= قطر الدائرة = ١٠ اسم بحيث أن

$$س^٢ + ص^٢ = (١٠)^٢$$

$$\therefore ص^٢ = ١٠٠ - س^٢$$

$$\therefore ص = \sqrt{١٠٠ - س^٢}$$

ونفرض مساحة المستطيل م

$$\therefore م = س \sqrt{١٠٠ - س^٢} \dots (١)$$

$$\therefore م = س^٢ (١٠٠ - س^٢) = ١٠٠ س^٢ - س^٤$$

$$\therefore \frac{٢٥}{٥س} = ٢٠٠ - س - ٤ س^٣ \text{ وعندما تكون م أكبر ما يمكن :}$$

$$\therefore \frac{٢٥}{٥س} = صفر \therefore ٢٠٠ - س - ٤ س^٣ = ٠ \text{ ومنها س}^٢ = ٥٠$$

$$\therefore س = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢} \text{ وبالتعويض في (١)}$$

$$\therefore م = ٥٠ \times ٥\sqrt{٢} = ٥٠٠ سم$$

نفرض أن ج = س، ب ج = ص، المساحة = م [٢٥]

$$\therefore س^٢ + ص^٢ = ١٦٠٠ \therefore ص = \sqrt{١٦٠٠ - س^٢}$$

$$\therefore م = \frac{١}{٢} س (١٦٠٠ - س^٢) \dots (١)$$

$$\therefore \frac{٢٥}{٥س} = \frac{١}{٢} (١٦٠٠ - س^٢) - \frac{١}{٢} س (١٦٠٠ - س^٢)$$

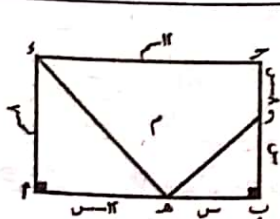
$$= \frac{١}{٢} (١٦٠٠ - س^٢) - \frac{١}{٢} س (١٦٠٠ - س^٢)$$

$$= \frac{١٦٠٠ - س^٢}{٢}$$

والمساحة تكون أكبر ما يمكن عندما $٨٠٠ - س^٢ = ٠$

$$\therefore س = ٢٠ \sqrt{٢} \text{ ، وبالتعويض في (١)}$$

$$\therefore م = \frac{٢٠ \sqrt{٢}}{٢} (١٦٠٠ - ٨٠٠) = ٤٠٠ سم$$



نفرض $٨ ب ه = م$

ب و = س سم، مساحة الشكل

الرباعي = م

المستطيل - (Δ ب و ه + Δ ه م ب)

$$م = ١٢ \times ٨ - \left[\frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١}{٢} (١٢ - س)^٢ \right]$$

[٢٥]

نفرض أن بعدي المستطيل

س، ص حيث س طول ضلع المثلث

$$\therefore ٢ ص + ٣ = ٤٧٠$$

$$\therefore ص = \frac{٤٧٠ - ٣}{٢}$$

$$\therefore \text{كمية الضوء} = م =$$

ضع مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$$= ٢ ص + ٣ + \frac{١}{٢} س^٢ \text{ ح.ا } ٥٦٠$$

$$= ٢ ص + \frac{٣ - ٤٧٠}{٢} + \frac{٣}{٤} س^٢$$

$$= ٢ ص - ٤٧٠ + \frac{٣}{٤} س^٢$$

$$\therefore \frac{٢٥}{س} = ٢ ص - ٤٧٠ + \frac{٣}{٢} س$$

$$\frac{٢٥}{س} = ٠ \text{ عندما تكون م قيمة عظمى}$$

$$\therefore ٩٤٠ = س (٣ + ١٢) \therefore س = \frac{٩٤٠}{٣ + ١٢}$$

$$\therefore س = \frac{٩٤٠}{٣ + ١٢} \times \frac{٣ + ١٢}{٣} = \frac{٣ + ١٢}{٣} \times \frac{٩٤٠}{٣ + ١٢}$$

$$\therefore \text{بالتعويض } ص = ١١٥ = ١٠ + ٣ سم$$

$$[٢٦] \quad ٤ س + ٢ ص + ٤ ص + ٢ ط = ل$$

$$\therefore ٤ ص = (ل - ٦ س - ط)$$

$$\therefore ص = \frac{١}{٤} (ل - ٦ س - ط)$$

$$\therefore م = \frac{١}{٢} ط س + ٢ س \times \frac{١}{٤} (ل - ٦ س - ط)$$

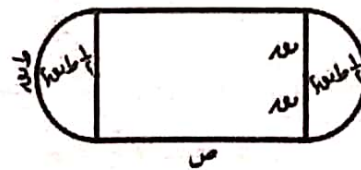
$$= \frac{١}{٢} ط س - \frac{١}{٢} ل س + ٣ س^٢ - \frac{١}{٢} ط س^٢$$

$$\therefore \frac{٢٥}{س} = \frac{١}{٢} ل - ٦ س - \frac{١}{٢} ط$$

$$\therefore \frac{١}{١٢} ل = ص \therefore \frac{١}{٤} (ل - ٦ س - ط) = ص$$

$$= \frac{ل(٦ - ط)}{٤٨}$$

[٢٧]



ط نوه + ٢ ص

+ ط نوه = ١٠٠ ط

$$\therefore ص = ط (٥٠ - نوه)$$

$$\therefore م = \frac{١}{٢} ط نوه + ٢ نوه ص + \frac{١}{٢} ط نوه$$

$$= ط نوه + ٢ نوه ط (٥٠ - نوه)$$

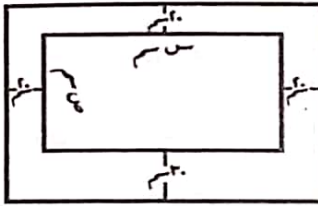
$$= ١٠٠ ط نوه - ط نوه^٢ \dots\dots\dots (١)$$

$$\therefore \frac{٢٥}{نوه} = ١٠٠ ط - ط نوه = ٠$$

عندما م تكون قيمة عظمى

$$\text{ومنها نوه} = ٥٠ \text{ ومن (١) } م = ٢٥٠٠ ط$$

[٢٨] نفرض أن بعدي



الإعلان س، ص

$$س + ٢٠ \times ٢ + ص$$

$$٤٠٠ = ص + ٣٠ + ٢٠$$

$$\therefore ص = ٣١٠ - س$$

$$\therefore م = س (٣١٠ - س) = ٣١٠ س - س^٢$$

$$\therefore \frac{٢٥}{س} = ٣١٠ - س = ٠ \text{ عند القيمة العظمى}$$

$$\therefore س = ١٥٥ \text{ سم}$$

$$\therefore ص = ١٥٥ - ٣١٠ = ١٥٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{بعدا اللوحة: } ٢٠ \times ٢ + ١٥٥$$

$$= ١٩٥ \text{ سم، } ٥٠ + ١٥٥ = ٢٠٥ \text{ سم}$$

[٢٩] نفرض أن بعدي المستطيل س، ص

$$\therefore س ص = ١٠ \text{ ومنها } ص = \frac{١٠}{س} \dots\dots (١)$$

$$\text{مساحة الأرض} = م = (س + ٢) (١ + ٢ ص) = (١ + ٢ ص) (١ + ٢ س)$$

$$\therefore م = س ص + ٢ ص + ٢ س + ٢ = ٦,٤ + ص + ٢ س$$

$$= ١٠ + ٣,٢ س + \frac{٢}{س} + ٦,٤ \text{ من (١)}$$

$$\therefore \frac{٢٥}{س} = ٣,٢ - \frac{٢}{س} = ٠ \text{ عند القيمة الصغرى}$$

$$\text{ومنها } س = \frac{١٠٠}{١٦} = ٦,٢٥ \text{ س } = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ متر}$$

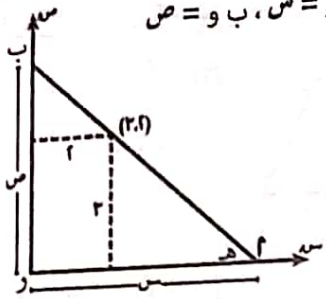
[٣٠] نفرض أن بعدي المستطيل

$$س، ص \text{ ومن التشابه } \therefore \frac{س}{٣٠} = \frac{ص}{١٠}$$

$$\therefore ص = ٣٠ - ٣٣ \therefore \text{مساحة المستطيل} = م = س ص$$

[٣٤]

نفرض أن p و s ، b و v



$$\begin{aligned} \text{طاه} &= \frac{3}{2-s} = \frac{v}{s} \\ \therefore \frac{3s}{2-s} &= v \\ \therefore \frac{1}{2} s &= v \\ \therefore \frac{3s}{(2-s)^2} &= m \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3s - (2-s)s}{(2-s)^2} = \frac{2s}{1 \times}$$

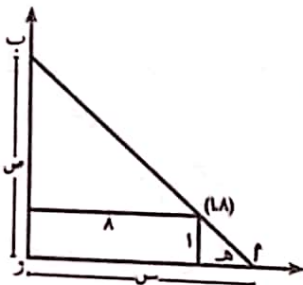
$$= \frac{3s^2 - 2s + s^2}{(2-s)^2} = \frac{4s^2 - 2s}{(2-s)^2}$$

$$\text{أي } 3s^2 - 2s = 12 \Rightarrow s \neq 0, \therefore s = 4$$

$$\therefore m = \frac{16 \times 3}{(2-4)^2} = 12 \text{ سم}^2$$

[٣٥]

نفرض أن p ب s ، b و v



$$\begin{aligned} \text{طاه} &= \frac{1}{8-s} = \frac{v}{s} \\ \therefore \frac{s}{8-s} &= v \text{ وبفرض } p = b = v \\ \therefore f + s &= 2s \end{aligned}$$

$$\therefore f = s = \frac{s^2}{(8-s)^2} \text{ وبالتفاضل}$$

$$\therefore f = \frac{2s}{(8-s)^2}$$

$$\frac{2s(8-s)^2 - (8-s)^2 \times 2}{(8-s)^4}$$

$$= \frac{2s(8-s)^2 - 2(8-s)^2}{(8-s)^4}$$

$$= \frac{2s(8-s)^2 - 2(8-s)^2}{(8-s)^4} = \frac{2s(8-s)^2 - 2(8-s)^2}{(8-s)^4}$$

الصغرى

$$\therefore \frac{8}{(8-s)^2} = 1 \Rightarrow 8 = (8-s)^2$$

$$\therefore 8 - s = 2 \Rightarrow s = 6$$

$$\therefore f = 100 + \frac{100}{4}$$

$$\therefore f = 145 \Rightarrow \text{في } 145 = 0 \text{ سم}$$

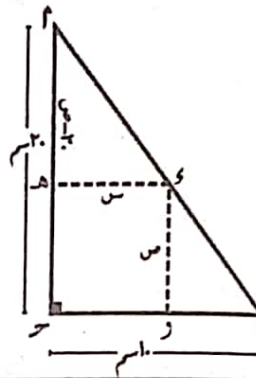
$$\therefore m = s(3-30)$$

$$= 30 - 3s$$

$$\therefore \frac{30 - 3s}{s} = \frac{2s}{6 - 30}$$

= صفر عند القيمة العظمى

$$\therefore s = 5$$

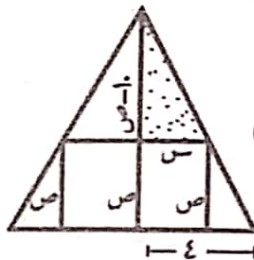


نفرض أن بعدى المستطيل s ، s

[٣٦]

$$\therefore \frac{10 - s}{10} = \frac{s}{4}$$

$$\text{ومنها } s = \frac{40 - 20}{2} = 10$$



\therefore مساحة المستطيل $m = 2 \times s = 20$

$$= 20 - 5s = 20 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore \frac{2s}{s} = \frac{20 - 5s}{10 - 5s} \Rightarrow 0 \text{ عندما تكون } m \text{ عظمى}$$

$$\therefore s = 2 \text{ ومن (١) } \therefore s = 5 \text{ سم}$$

[٣٧]

بفرض مساحة المستطيل p ب و $j = m$

$$\therefore m = s(9 - s)$$

$$\therefore m = 9s - s^2$$

$$\therefore \frac{9s - s^2}{s} = \frac{2s}{3 - 9}$$

عندما تكون m قيمة عظمى

$$\therefore s = 3 \Rightarrow \text{فقط لأن } s \leq 0$$

$$\therefore s = 3 - 9 = -6 \Rightarrow p = (6, 3)$$

[٣٨]

مساحة المستطيل =

$$m = s(18 - s)$$

$$\therefore \frac{1}{2} (18 - s) = \frac{s}{s}$$

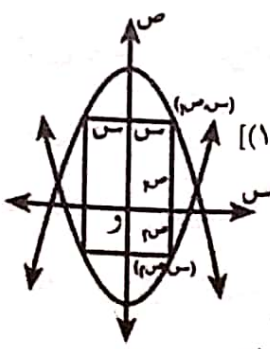
$$\therefore m = 54 - 3s$$

$$\therefore \frac{54 - 3s}{s} = \frac{2s}{9 - 54}$$

عند القيمة العظمى

$$\therefore s = 6 \Rightarrow \text{فقط لأن } s \leq 0$$

$$\therefore m = 54 - 3 \times 6 = 36 \text{ سم}^2$$



ح = س (س - ٢) (س - ١٦) (س - ٢١) (س - ٢) [٣٦]

٣٣٦ = س - ٧٤ + س - ٤ + س - ٢
 $\frac{٤٥}{س} = ٣٣٦ - ٧٤ - ٤ - ٢ = ٢٥٦$
 صفر ومنها = (٣ - س) (٢٨ - س) = صفر ومنها
 س = ٣ والجواب الآخر مرفوض.

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س ، الارتفاع = ع [٤٠]

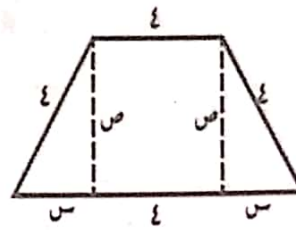
٩٠ = س + ع . ٩٠ = ع - ٩٠
 ح = س = ع = ٩٠
 $\frac{٤٥}{س} = ٩٠ - ٩٠ = ٠$ عند القيمة العظمى
 ومنها س = ١٥ سم . ع = ٩٠ - ٩٠ = ٠ سم

نفرض أن أبعاد العلبة س ، س ، ع [٤١]

٢٧ = س + ع + س
 ٢٧ = س + ع
 $\frac{٢٧ - س}{٣} = ع$
 $\frac{٢٧ - س}{٣} \times ٢ = س$
 $\frac{٢٧ - س}{٣} \times ٢ = س$
 صفر عند أكبر حجم
 س = ٣ بوصة
 $\frac{٩ - ٢٧}{٩} = ع$ ٢ بوصة

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س ، الارتفاع = ع [٤٢]

٣٠ = ع + س + س
 ٣٠ = ع + ٢س
 $\frac{٣٠ - ع}{٢} = س$
 $\frac{٣٠ - ع}{٢} \times ٢ = س$
 صفر عند القيمة العظمى
 س = ١٥ سم
 $\frac{١٠ - ٣٠}{٢} = ع$ ١٠ سم



من الشكل [٣٦]

ص = ١٦ - س
 $\frac{١}{٢} (٤ + ٣ + س) = ١٠$
 ص = ٣
 م = ١٦ - ٣ = ١٣

ومن (١) = (١٦ - س) (٤ + س) [٣٧]

٢٢ = م = ٢٢٥ - ١٥ = ٢١٠
 م = ٢١٠
 م = ٢١٠
 م = ٢١٠



بفرض ه و س [٣٧]

و ه = ص
 $\frac{٢٠}{١٠} = \frac{٢٠}{١٠}$
 ص = ٣٠
 م = ٣٠ - ٣٠ = ٠
 $\frac{٢٥}{س} = ٣٠ - ٣٠ = ٠$

صفر عند القيمة العظمى

س = ٣٠ = ٣٠ = ٣٠

٢٢٥ = ٢٢٥ - ١٥ = ٢١٠

ح = ١٥ (س - ١١) (س + ٣) [٣٨]

١٥ = (س - ٨ + ٣٣) (س - ٨) [٣٩]

١٥ = (س - ٨) (س - ٨)

صفر عند القيمة العظمى

س = ٨ = ٨

٧٣٥ = (١٦ - ٣٢ + ٣٣) (١٦ - ٣٢ + ٣٣) [٣٩]

عند القيمة الصغرى \therefore س = 6 قدم

$$\therefore \text{م} = 6 + 6 + 72 = 192 \text{ قدم}$$

$$\therefore \text{أقل ثمن} = 192 \times \frac{3}{4} = 144 \text{ جنيه}$$

[٤٧] بفرض أن تكلفة المتر المربع للطلاء = ك

\therefore تكلفة المتر المربع من الأرض = ك

\therefore التكاليف = (س + ٤ س ص) ك + س^٢ × ك

$$\therefore \text{س}^٢ \text{ ص} = ٩٦ \therefore \text{ص} = \frac{٩٦}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{د (س)} = \text{ك} (س + ٤ \times \frac{٩٦}{\text{س}} + \text{ك}^٢ \text{ س}^٢)$$

$$\therefore \text{د (س)} = \text{ك} (س^٣ + ٣٨٤ \text{ س} - ١)$$

$$= 6 \text{ ك س}^٢ - (س^٢ - ٦٤) = \text{صفر عند القيمة الصغرى}$$

$$\therefore \text{س}^٢ = ٦٤ \therefore \text{س} = ٨ \therefore \text{ص} = ٣ \text{ م}$$

$$[٤٨] ١٦٠٠٠ \text{ ط} = \text{ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{١٦٠٠٠}{\text{نه}^٢} \dots (١)$$

$$\therefore \text{م} = ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع} + ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ = ٢ + \frac{١٦٠٠٠}{\text{نه}^٢} \times ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$\text{ط}^٢ \text{ نه}^٢ = ٣٢٠٠٠ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - ١ = ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$\therefore \frac{٢٥}{\text{نه}^٢} = ٣٢٠٠٠ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - ١ = ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$= ٤ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - (٨٠٠٠ + \text{نه}^٢) = \text{صفر}$$

عند القيمة الصغرى \therefore نه = ٨٠٠٠ \therefore نه = ٢٠ سم

$$\therefore \text{ع} = \frac{١٦٠٠٠}{٤٠٠} = ٤٠ \text{ سم}$$

$$[٤٩] ٢٠ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ = ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ + ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع} + ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$\therefore ٢٠ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ = ٣ \text{ نه}^٢ + ٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{١٢٠ - ٣ \text{ نه}^٢}{\text{نه}^٢} \dots (١)$$

$$\text{ح} = \text{ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع} + \frac{٢}{٣} \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$= \text{ط}^٢ \text{ نه}^٢ \times \frac{١٢٠ - ٣ \text{ نه}^٢}{\text{نه}^٢} + \frac{٢}{٣} \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$= ١٠ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - \frac{٢}{٣} \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ + \frac{٢}{٣} \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$\therefore \frac{٢٥}{\text{نه}^٢} = ١٠ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - \frac{٢}{٣} \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ = \text{صفر}$$

$$٤٦٢ = ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع} + ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$[٤٣] \frac{٤٤ \text{ نه}^٢}{٧} - ٤٦٢ = ٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع}$$

$$\therefore \text{نه}^٢ \text{ ع} = ١٤٧ - \text{نه}^٢ \therefore \text{ع} = \frac{١٤٧ - \text{نه}^٢}{\text{نه}^٢}$$

$$\therefore \text{ح} = \text{ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع}$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{٢٢ \text{ نه}^٢}{٧} \times \frac{١٤٧ - \text{نه}^٢}{\text{نه}^٢} = ٢٣١ - \frac{١١ \text{ نه}^٢}{٧}$$

$$\therefore \frac{٤٥}{\text{نه}^٢} = ٢٣١ - \frac{١١ \text{ نه}^٢}{٧} = \text{صفر عند القيمة العظمى}$$

$$\therefore \text{نه}^٢ = ٤٩ \therefore \text{نه} = ٧ \text{ سم}$$

$$[٤٤] ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع} + ٢ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ = ٣٦ \text{ ط}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{١٨ - \text{نه}^٢}{\text{نه}^٢}$$

$$\therefore \text{ح} = \text{ط}^٢ \text{ نه}^٢ \text{ ع} = \frac{١٨ - \text{نه}^٢}{\text{نه}^٢} \times ١٨ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - ٣ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢$$

$$\therefore \frac{٤٥}{\text{نه}^٢} = ١٨ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ - ٣ \text{ ط}^٢ \text{ نه}^٢ = \text{صفر عند القيمة العظمى}$$

$$\therefore \text{نه}^٢ = ٦ \therefore \text{نه} = ٢٧ \text{ بوصة، ع} = ٢٧ \text{ بوصة}$$

[٤٥] نفرض أن طول ضلع القاعدة س، الارتفاع ع

$$\therefore \text{س}^٢ \text{ ص} = ١٠٨ \therefore \text{ص} = \frac{١٠٨}{\text{س}} \dots (١)$$

$$\text{المساحة} = \text{م} = ٤ \text{ س ص} + \text{س}^٢ = ٤ \times \frac{١٠٨}{\text{س}} + \text{س}^٢$$

$$\therefore \text{م} = \text{س}^٢ + ٤٣٢ \text{ س} - ١ = \frac{٢٥}{\text{س}} \therefore \text{س}^٢ - ٤٣٢ \text{ س} - ١ = \frac{٢٥}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{٢٥}{\text{س}} = \text{س}^٢ - ٤٣٢ \text{ س} - ١ = \text{صفر عند القيمة الصغرى}$$

$$\therefore \text{س}^٢ = ٢١٦ \therefore \text{س} = ٦ \text{ بوصة}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{١٠٨}{٣٦} = ٣ \text{ بوصة}$$

[٤٦] نفرض أن بعدا القاعدة هما س، ص قدم

$$\therefore \text{س} \times \text{ص} = ١٨٠ = ٥ \times ٣٦ \therefore \text{ص} = \frac{٣٦}{\text{س}} \dots (١)$$

المن يكون أقل ما يمكن عندما تكون مساحة الخشب ولكن م

$$\text{أقل ما يمكن} \therefore \text{م} = ٢ \text{ س ص} + ١٠ \text{ س} + ١٠ \text{ ص}$$

$$\therefore \text{م} = ٢ \text{ س} \times \frac{٣٦}{\text{س}} + ١٠ \text{ س} + \frac{٣٦}{\text{س}}$$

$$= ٧٢ + ١٠ \text{ س} + \frac{٣٦}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{٢٥}{\text{س}} = ١٠ - ٣٦ \text{ س} - ١ = \text{س}^٢ - ٣٦ \text{ س} - ١ = ٠$$

عند القيمة العظمى ومنها $P = 2$ ، من (١)

$$\therefore E = P = 2$$

نفرض أن النقطة

هي M على بعد s كم من P

$$\therefore D(s) = \frac{8}{s} + \frac{1}{s-60} = \frac{8}{s} + \frac{1}{s-60}$$

$$\therefore D'(s) = -\frac{8}{s^2} - \frac{1}{(s-60)^2}$$

= صفر عند القيمة الصغرى

$$\therefore \frac{1}{s} = \frac{2}{s-60} \Rightarrow \frac{s-60}{s} = 2 \Rightarrow s-60 = 2s \Rightarrow s = -60$$

$$\therefore s = 120 - 60 = 60 \text{ كم من } P$$

نفرض أن عدد النسخ الزيادة = V كتاب

\therefore مكسب الكتاب الواحد بعد التخفيض

$$= 7 - \frac{5}{100} = 7 - \frac{1}{20} = \frac{139}{20}$$

$$\therefore \text{الربح الكلى} = M = (100 + V) \times \left(7 - \frac{1}{20}\right)$$

$$\therefore M = 700 + 2V - \frac{1}{20}V$$

$$\therefore \frac{dM}{dV} = 2 - \frac{1}{20} = \frac{39}{20} = 0 \text{ عندما تكون } M \text{ أكبر ما يمكن}$$

$$\therefore \frac{39}{20} = 0 \Rightarrow V = 76$$

$$\therefore \text{عدد الكتب} = 120$$

نفرض أن عدد المشتركين الزيادة هو s التخفيض

$$\text{في الاشتراك نتيجة للزيادة} = \frac{20}{s} = \frac{1}{5} \Rightarrow s = 100$$

$$\text{قيمة الاشتراك بعد التخفيض} = 42 - \frac{1}{5}$$

$$\text{وعدد المشتركين بعد الزيادة} = 150 + s$$

$$\therefore \text{الدخل} = L = (150 + s) \left(42 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\therefore \frac{dL}{ds} = \left(42 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 42$$

$$= 12 - \frac{2}{5} = 11.6 \text{ صفر عندما تكون } L \text{ أكبر ما يمكن ومنها}$$

$$s = 30 \therefore \text{عدد المشتركين} = 150 + 30 = 180 \text{ مشترك}$$

نفرض أن التكلفة في الساعة هي K

$$\therefore K = \alpha E \therefore K = M \text{ حيث } M \text{ ثابت}$$

$$250 = M(25) \therefore M = \frac{1}{25}$$

$$\therefore K = \frac{1}{25} \text{ ع جنيهاً في الساعة}$$

$$\text{زمن قطع الميل الواحد} = \frac{1}{K} = \frac{25}{1}$$

\therefore تكلفة الميل الكلية = الأساسية + الإضافية

$$\therefore \text{ص (مثلاً)} = \frac{1}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{25} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{dV}{dS} = \frac{1}{25} - \frac{1}{2} = \frac{1}{25} - \frac{1}{2} = \frac{1}{25} - \frac{1}{2}$$

يمكن

$$\therefore \frac{1}{25} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore E = 2500 \therefore \text{ع} = 50 \text{ ميل/ الساعة}$$

المجموعة الخامسة :

التحذب - نقط الانقلاب - رسم المنحنيات

$$[1] \text{ د'' (P) = صفر وتتغير إشارتها قبلها عن بعدها}$$

$$[2] \text{ الصفر}$$

$$[3] \text{ محدب لأسفل}$$

$$[4] \text{ محدب لأعلى}$$

$$[5] \text{ محدب لأسفل}$$

$$[6] \text{ محدب لأعلى}$$

$$[7] \text{ ص' = 3 س' \therefore ص'' = 6 س' > 0 \text{ عندما}$$

$$s \in [0, \infty)$$

$$[8] \text{ د' (س) = 3(س-2)}$$

$$\therefore \text{د'' (س) = 6(س-2)}$$

د' (س) = ٣(س + ٢) [١٧]

د' (س) = ٦(س + ٢) ∴

د' (س) = ٠ عندما س = -٢ ∴ (٠، -٢) نقطة حرجة

(i) في $[-\infty, -٢]$: د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى في هذه الفترة

(ii) في $[-٢, \infty]$: د' (س) < ٠ ∴ منحنى د محدب لأسفل في هذه الفترة

(iii) إشارة د' (س) تتغير من > إلى < عند س = -٢

∴ (٠، -٢) هي نقطة إنقلاب

د' (س) = $\frac{٣}{٥}(٣-س)$ [١٨]

د' (س) = $-\frac{٦}{٢٥}(٣-س)$ ∴

وهو غير معرف عند س = ٣

∴ (٠، ٣) نقطة حرجة

(i) في $[-٣, \infty]$: د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأسفل في هذه الفترة

(ii) في $[-\infty, ٣]$: د' (س) < ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى في هذه الفترة

من (i)، (ii) ∴ (٠، ٣) نقطة إنقلاب

د' (س) = $\frac{١}{٣}(١-س)$ [١٩]

د' (س) = $-\frac{٢}{٩}(١-س)$ ∴

وهو غير معرف عند س = ١

∴ (٤، ١) نقطة حرجة

(i) في $[-١, \infty]$: د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى في هذه الفترة

(ii) في $[-\infty, ١]$: د' (س) < ٠ ∴

منحنى د محدب لأسفل في هذه الفترة

من (i)، (ii) ∴ (٤، ١) نقطة إنقلاب

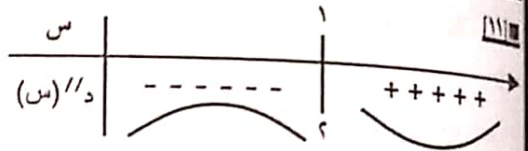
د' (س) = ٠

∴ ٢ = ١ ∴

د' (س) = ٠ ∴ ٣٦ + ٢ × ١٦ = ٠

∴ ٣ = ١

د' (س) < ٠



∴ محدب لأعلى عند س ∈ $[-١, \infty]$

د' (س) = ٦(س - ١٨) > ٠ عندما

س ∈ $[-٣, \infty]$

د' (س) = ٢ - ٣(س) [١٣]

∴ د' (س) = ٠ لكل س ∈ ح ∴ منحنى د محدب لأعلى دائماً ولا يوجد نقط إنقلاب

د' (س) = ٤(٣-س) [١٤]

د' (س) = ١٢(٣-س) ≤ ٠ لكل س ∈ ح

∴ منحنى د محدب لأسفل دائماً ولا توجد نقطة إنقلاب

د' (س) = $\frac{٢}{٣}(١+س)$ [١٥]

د' (س) = $-\frac{٢}{٩}(١+س)$ ∴ > ٠

لكل س ∈ ح - (١-) ∴ منحنى د محدب لأعلى في هذه الفترة

د' (س) = ٩ - ٢(س) [١٦]

د' (س) = $-\frac{٢}{٣}(٢-س)$ ∴

د' (س) = $-\frac{٢}{٩}(٢-س)$ ∴

د' (س) < ٠ لكل س ∈ ح - (٢)

∴ منحنى د محدب لأسفل في هذه الفترة

[٢٠] د' (س) = ٦س - ٣س^٢

∴ د' (س) = ٦ - ٦س = ٠

عند س = ١ ∴ (٢، ١) نقطة حرجة

(i) د' (س) < ٠ في [١، ∞) ∴ منحنى د محدب لأسفل

(ii) د' (س) > ٠ في [١، ∞) ∴ منحنى د محدب لأعلى

(iii) (٢، ١) نقطة إنقلاب لتغير تحدب المنحنى حولها

[٢١] د' (س) = ٣س^٢ - ١٨س + ٢٤

∴ د' (س) = ٦س - ١٨ = ٠ عند س = ٣

(i) في [٣، ∞) د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى في

هذه الفترة

(ii) في [٠، ٣) د' (س) < ٠ ∴ منحنى د محدب لأسفل في

هذه الفترة

(iii) من (i)، (ii) ∴ (١١، ٣) نقطة انقلاب

[٢٢] د' (س) = ١(٢-س) × ٢(٢-س) + ٢(٢-س) = ١(٢-س)

= (٢-س) (٢-٣س) = ٢ - ٣س - ١٠س + ٣س^٢

∴ د' (س) = ٣س^٢ - ١٠س + ٢ = ٠ عند س = ٢/٣

(i) في [٢/٣، ∞) د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى

(ii) في [٠، ٢/٣) د' (س) < ٠ ∴ منحنى د محدب لأسفل

من (i)، (ii) ∴ (٢/٣، ٢) نقطة انقلاب

[٢٣] د' (س) = ٤س^٣ - ١٨س^٢ + ٢٤س - ٨

∴ د' (س) = ١٢س^٢ - ٣٦س + ٢٤ = ٠

= ١٢(١-س)(٢-س) = ٠ عند س = ١، س = ٢

(i) في كل من [١، ٢]، [٢، ∞) د' (س) < ٠

∴ منحنى د محدب لأسفل في كل منها

(ii) في [٢، ١] د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى في

هذه الفترة

(iii) من (i)، (ii) ∴ (١، ٢)، (٢، ٠) نقط انقلاب

[٢٤] د (س) = ٨س^{١/٣} + ٤س^{٢/٣}

∴ د' (س) = ٨/٣س^{-٢/٣} + ٨/٣س^{-١/٣}

∴ د'' (س) = ٨/٩س^{-٥/٣} + ٨/٩س^{-٤/٣}

= ٨/٩س^{-٤/٣} (٤-س) = ٠ عند س = ٤

هو غير معرف عند س = ٠

∴ د' (س) = ٠ عند س = ٤ ∴ كل منها نقطة حرجة

(i) في [٠، ∞) د' (س) < ٠

∴ منحنى د محدب لأسفل في هذه الفترة

(ii) في [٤، ∞) د' (س) > ٠

∴ منحنى د محدب لأعلى في هذه الفترة

(iii) في [٤، ∞) د' (س) > ٠

∴ منحنى د محدب لأسفل في هذه الفترة

(iv) (٠، ٠)، (٤، ٤)، (٤، ٢) نقطة انقلاب

[٢٥] د' (س) = ٥س^٤ - ٢٠س^٣

∴ د' (س) = ٢٠س^٣ - ٦٠س^٢

= ٢٠س^٢ (٣-س) = ٠ عند س = ٠، س = ٣

(i) في [٠، ∞) د' (س) > ٠

∴ منحنى د محدب لأعلى في هذه الفترة

(ii) في [٣، ∞) د' (س) > ٠ ∴ منحنى د محدب لأعلى في

هذه الفترة

(iii) في [٣، ∞) د' (س) < ٠ ∴ منحنى د محدب لأسفل في

هذه الفترة

(iv) من (ii)، (iii) ∴ (٣، ١٥٩) فقط هي نقطة انقلاب

[٢٦] د (س) = $\begin{cases} ٣س٣ - ٢س٣، ٣ > س \\ ٣س٣ - ٢س٣، ٣ \leq س \end{cases}$

د' (س) = $\begin{cases} ٢س٣ - ٢س٣، ٣ > س \\ ٢س٣ - ٢س٣، ٣ \leq س \end{cases}$

[٢٩] د/ (س) = ٤س - ٣س ٤٨ - ٣

= ٤س (س) - (٢س - ٢س) (٢س + ٢س) (٢س) =

= ٠ عند س = ٠، ٢س - ٢س، ٢س

د/ (س) = ١٢س - ٢س ٤٨ - ٢

د/ (س) = ١٢ (س) (٢ - س) (٢ + س) = ٠ عند س = ٢ =

س - ٢ =

(i) د/ (٢ - س) (٢س - ٢س) (٢س - ٢س) = ٠ عند س = ٦٠ - صغرى محلية

(ii) د/ (٠) > ٠ عند النقطة (٨٤، ٠) عظمى محلية

(iii) د/ (٢س - ٢س) < ٠ عند النقطة (٢س - ٢س، ٦٠ - صغرى محلية.

(iv) إشارة د/ (س) تتغير قبل س = ٢ - عن بعدها وكذلك عند

س = ٢ عند (٢، ٢)، (٢ - ٢، ٢) نقط انقلاب

[٣٠] د/ (س) = ٣ (٣ - س) + ٣ (٣ - س) = ٣ (٣ - س)

= ٣ (٣ - س) (٣ - س) =

= صفر عند س = ٣، ٣ = ٣/٤

د/ (س) = ٢ (٣ - س) (٣ - س) + ٢ (٣ - س) (٣ - س) =

= ٢ (٣ - س) (٣ - س) (٣ - س) = ٠ عند س = ٣، ٣ = ٣/٤

(i) د/ (س) لا تتغير قبل ٣ في إشارتها عن بعدها ٠ ليست

عظمى أو صغرى

(ii) د/ (٣/٤) < ٠ عند النقطة (٣/٤، ٢١٨٧/٢٥٦) صغرى محلية

(iii) إشارة د/ (س) تتغير بعد س = ٣ عن قبلها وكذلك عند س

٣/٤ =

٠ عند النقطة (٣/٤، ٢١٨٧/٢٥٦) نقط انقلاب

[٣١] د/ (س) = ٥س - ٤س ٥ = ٥ عند س = ١، ١ =

د/ (س) = ٢س ٢٠ = ٢ عند س = ٠ =

(i) د/ (١ - س) > ٠ عند (٣، ١ - س) عظمى محلية

(ii) د/ (١) < ٠ عند (٥ - س، ١) صغرى محلية

د/ (س) = ٦ - ٦س ، ٣ > س ، ٦ - ٦س ، ٣ < س

د/ (٣) = ١٢ - ١٢س = ١٢ (٣ - س) = ١٢ عند س = ٣

نقطة حرجة، د/ (س) = ٠ عند س = ١

٠ هي نقطة حرجة

(i) في كل من [١، ٣] ، [٣، ٤] د/ (س) < ٠

منحنى د محذب لأسفل في هذه الفترات

(ii) في [٣، ٤] : د/ (س) > ٠

منحنى د محذب لأعلى في هذه الفترة من (i) ، (ii)

٠ هي نقطة انقلاب (٠، ٣)، (٢، ١)

[٢٧] د/ (س) = ٢س (٣ + ٢س) - ٢س (٣ + ٢س) = ٢س (٣ + ٢س) (٣ + ٢س)

= ٢س (٣ + ٢س) = ٢س (٣ + ٢س) = ٢س (٣ + ٢س)

د/ (س) = ٤س (٣ + ٢س) - ٤س (٣ + ٢س) = ٤س (٣ + ٢س) (٣ + ٢س)

٤س (٣ + ٢س) = ٤س (٣ + ٢س) = ٤س (٣ + ٢س) = ٤س (٣ + ٢س)

١ + =

(i) في كل من [١، ٣] ، [٣، ٤] : د/ (س) > ٠

منحنى د محذب لأعلى في هذه الفترات

(ii) في [١، ٣] : د/ (س) < ٠ منحنى د محذب لأسفل في

هذه الفترة، (١ - س، ١/٤)، (١/٤، ١) نقط انقلاب

[٢٨] د/ (س) = ٦س - ٢س ١٨ + ١٢

= ٦ (١ - س) (١ - س) = ٦ (١ - س) (١ - س)

= ٠ عند س = ١، ١ = ٢

د/ (س) = ١٢س - ١٨س = ١٨ (١ - س) = ١٨ عند س = ٣/٤

د/ (١) > ٠ د/ (١) = ٥ - ٥ هي قيمة عظمى محلية

د/ (٢) < ٠ د/ (٢) = ٦ - ٦ هي قيمة صغرى محلية

د/ (س) > ٠ قبل س = ٣/٤ ، ٣/٤ بعد س = ٠

١١/٢ (١ - س) نقط انقلاب

(iii) د (س) > 0 قبل س = 0 ، موجب بعدها ، (0 ، 1) - انقلاب

[32]

$$\frac{(s + \sqrt{3})(s - \sqrt{3})}{(s + \sqrt{3})^2} = \frac{(s^2 - 3)}{(s + \sqrt{3})^2} = \frac{(s^2 - 3)}{(s + \sqrt{3})^2}$$

$$0 = \text{عند } s = \sqrt{3} , \sqrt{3} = s$$

$$\frac{(s + \sqrt{3})(s - \sqrt{3})}{(s + \sqrt{3})^2} = \frac{(s^2 - 3)}{(s + \sqrt{3})^2} = \frac{(s^2 - 3)}{(s + \sqrt{3})^2}$$

$$= \text{صفر عند } s = 0 , 3 , \sqrt{3}$$

(i) د (س) > 0 عندما س > 3 ، د (س) < 0 بعدها

0 (3 - ، 3 - ، 3 -) صغرى محلية

(ii) د (س) < 0 عندما س > 3 ، د (س) > 0 بعدها

0 (3 - ، 3 - ، 3 -) عظمى محلية

(iii) النقط (0 ، 0) ، (3 - ، 3 -) ، (3 ، 3) نقط انقلاب

$$[33] \text{ د (س) } = s^3 - 12s + 1 = 0 \dots (1)$$

$$0 = \text{عندما } s = 12 - s = 0$$

0 (2 ، 16) هي نقطة انقلاب وميل المماس عندها

$$= \text{د (2) } = 11 - 11 = 0 \text{ معادلة المماس هي}$$

$$ص + 16 = 11 - 11 (2 - s) \text{ أي } 11s + ص - 6 = 0$$

$$[34] \text{ تحقق معادلة المنحنى } (3 - ، 1)$$

$$0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 1 = 1 + 1 = 2 \dots (1)$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} \text{ ، } 0 = 3s^2 + 12s + 6 = 0$$

$$= \text{صفر عندما } s = 1 \text{ ، } 0 = 12 + 6 = 18 \text{ ، } 3 = 3$$

$$\text{من (1) } 0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 1 = 1 + 1 = 2$$

$$[35] \text{ تحقق معادلة المنحنى أي } (4 ، 0)$$

$$0 = 4 + 4 = 8 \text{ ، } 4 = 4 + 4 = 8 \dots (1)$$

(2 ، 1 -) تحقق المعادلة أيضاً

$$0 = 1 - 1 + 1 = 1 \text{ ، } 2 = 2 + 1 = 3 \text{ وبالتعويض من (1)}$$

$$0 = 2 - 2 = 0 \dots (2)$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} = 0 \text{ ، صفر}$$

عندما س = 1 لأن المماس عندها أفقياً

$$0 = 3 - 3 = 0 \dots (3)$$

وبطرح (3) - (2) : 0 = 2 - 2 = 0 ... (4)

$$\frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} = 0 \text{ ، صفر عند } (2 ، 1 -)$$

$$0 = 2 - 2 = 0 \text{ ، } 0 = 2 - 2 = 0 \dots (5)$$

$$\text{بجمع (4) + (5) : } 0 = 2 - 2 = 0 \text{ ومن (5)}$$

$$0 = 2 - 2 = 0 \text{ ، } 6 = 6 \text{ وبالتعويض } 6 = 6$$

[36] النقطة (1 ، 0) تحقق معادلة المنحنى

$$0 = 0 + 0 + 1 = 1 \dots (1)$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{3}{1} = 3 \text{ ، المماس عند (1 ، 2) ميله } = 3$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} = 3 \text{ ، }$$

$$0 = 3 - 3 = 0 \dots (2)$$

(1 ، 2) تحقق معادلة المنحنى أيضاً

$$0 = 1 + 1 + 1 = 3 \dots (3)$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} = 3 \text{ ، عند النقطة (1 ، 2)}$$

$$0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 0 = 3 - 3 = 0 \dots (4)$$

$$\text{بطرح (3) - (1) : } 0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 0 = 3 - 3 = 0 \dots (5)$$

$$\text{وبطرح (5) - (4) : } 0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 0 = 3 - 3 = 0 \dots (6)$$

$$\text{وبطرح (6) - (4) : } 0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 0 = 3 - 3 = 0$$

$$\text{من (4) : } 0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، من (2)}$$

$$0 = 3 - 3 = 0 \text{ ، } 0 = 3 - 3 = 0$$

$$[37] \frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} = 3 \text{ ، }$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{3s^2 + 12s + 6}{(s + 3)^2} = 3 \text{ ، النقط (1 ، 2) ، (1 - ، 3)}$$

تحقق معادلة المنحنى

عند $s = 2$ ، $s = 1$

$$\therefore 12 - 9 + 3 = 6$$

$$= 0 \quad (3) \quad 3 + 2 + 3 = 8$$

$$\text{بطرح (1) - (2)} \quad 0 = 3 - 9 + 3 = -3$$

$$\therefore 3 - 9 = -6 \quad (5) \quad \dots$$

$$\text{وبطرح (3) - (5)}$$

$$\therefore 3 - 9 = -6$$

$$\therefore 3 - 9 = -6 \quad (6) \quad \dots$$

$$\text{وبطرح (3) - (4)} \quad 0 = 3 - 9 = -6$$

$$\therefore 3 - 9 = -6 \quad (7) \quad 0 = 3 - 9$$

$$\text{وبطرح (6) - (7)} \quad 3 = 9 \quad \therefore 3 = 9$$

$$\text{ومن (3)} \quad 3 = 9 \quad \therefore 3 = 9 \quad \text{من (1)}$$

$$\therefore 3 = 9$$

$$\therefore 3 = 9 \quad \text{د (س)} \quad 3 = 9 \quad 3 = 9 \quad 3 = 9$$

$$\therefore 3 = 9 \quad \text{د (س)} \quad 3 = 9 \quad 3 = 9 \quad 3 = 9$$

$$\therefore 3 = 9 \quad \text{د (س)} \quad 3 = 9 \quad 3 = 9 \quad 3 = 9$$

$$\therefore 3 = 9 \quad \text{د (س)} \quad 3 = 9 \quad 3 = 9 \quad 3 = 9$$

$$\text{نقطة انقلاب، د (س) } > 0$$

$$\text{في } \left[-\infty, \frac{1}{3} \right] \quad \therefore \text{منحنى}$$

$$\text{دمحبد لأعلى في هذه الفترة}$$

$$\text{في } \left[\frac{1}{3}, \infty \right] \quad \therefore \text{منحنى د (س) } < 0$$

$$\therefore \text{منحنى د محبد}$$

$$\text{لأسفل في هذه الفترة}$$

$$\text{ثم نأخذ } (1, 12), (3, 4), (5, 12)$$

$$\text{نقط إضافية.}$$

(4, 0) نقطة تقاطع مع محور الصادات

[43]

$$= (s)'$$

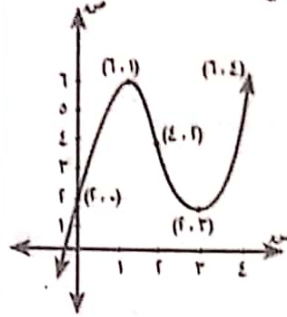
$$3(1-s)(3-s)$$

$$\text{د (س)} = 6(2-s)$$

$$(6, 1) \text{ عظمى محلية}$$

$$(2, 3) \text{ ص. م.، } (4, 2) \text{ انقلاب}$$

$$(6, 4) \text{ إضافية}$$



(2, 0) هي نقطة التقاطع مع محور الصادات

[44]

$$\text{د (س)} = 3(1-s)(3-s)$$

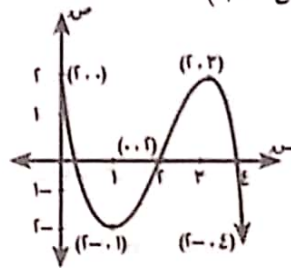
$$\text{د (س)} = 6(2-s)$$

$$(2, 1) \text{ صغرى محلية}$$

$$(2, 3) \text{ عظمى محلية}$$

$$(0, 2) \text{ انقلاب}$$

$$(2, 4) \text{ نقطة إضافية}$$



نقط التقاطع مع محور السينات

[45]

$$\text{هي } (0, 1), (0, 2), (2, 0) \text{ الصادات } (2, 0)$$

$$\text{د (س)} = 3(1-s)(3-s)$$

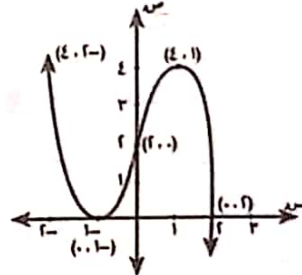
$$\text{د (س)} = 6(2-s)$$

$$(0, 1) \text{ صغرى محلية}$$

$$(4, 1) \text{ عظمى محلية}$$

$$(2, 0) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$(4, 2) \text{ إضافية}$$



كل من $(1, 12), (3, 4), (5, 12)$ تحقق معادلة

[46]

المنحنى

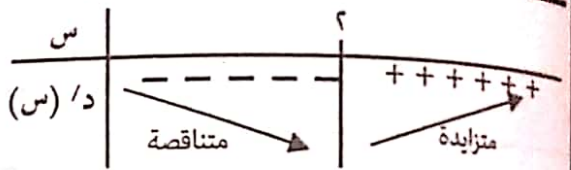
$$\therefore 12 - 9 + 3 = 6$$

$$12 - 9 + 3 = 6$$

$$\frac{12}{3} = 4 \quad \therefore 12 - 9 + 3 = 6$$

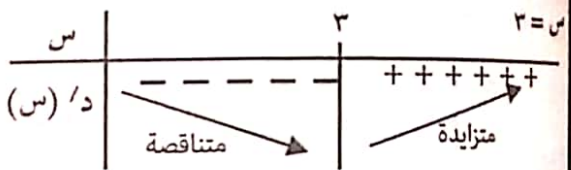
تمارين (١-٣) من الكتاب المدرسي

[١] د' (س) = ٢ - س ، د' (س) = ٠ عندما س = ٢



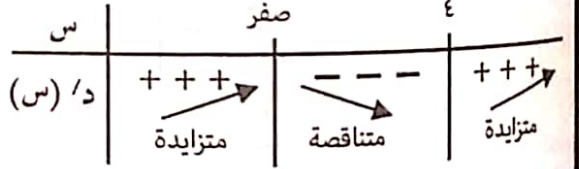
د (س) متناقصة على $]-\infty, 2[$ ، متزايدة على $]2, \infty[$

[٢] د' (س) = ٢ (س - ٣) ، د' (س) = ٠ عندما س = ٣



د (س) متناقصة على $]-\infty, 3[$ ، متزايدة على $]3, \infty[$

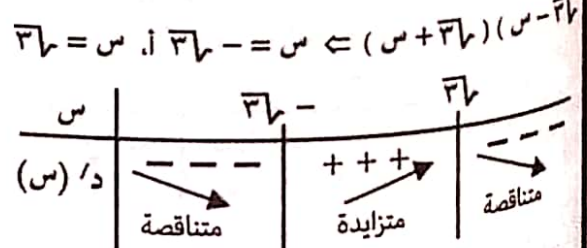
[٣] د' (س) = ٣س - ١٢ ، د' (س) = ٠ عندما س = ٤



د (س) متناقصة على $]-\infty, 4[$ ، متزايدة على $]4, \infty[$

، ومتناقصة على $]4, 0[$

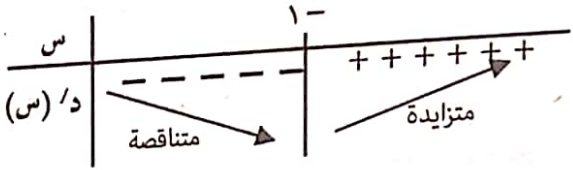
[٤] د' (س) = ٩ - ٣س ، د' (س) = ٠ عندما س = ٣



د (س) متناقصة في $]-\infty, 3[$ ، متزايدة في $]3, \infty[$

متزايدة في $]3, \infty[$

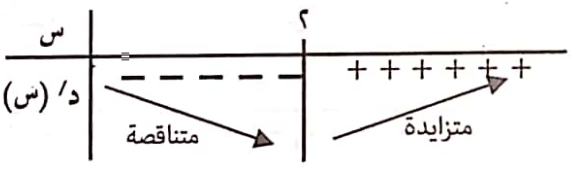
[٥] د' (س) = ٤س + ٤ ، د' (س) = ٠ عندما س = -١



د (س) متناقصة على $]-\infty, -1[$ ، متزايدة على $]-1, \infty[$

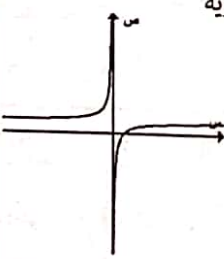
، متزايدة على $]-1, \infty[$

[٦] د' (س) = ٤(٢ - س) ، د' (س) = ٠ عندما س = ٢



د (س) متناقصة على $]-\infty, 2[$ ، متزايدة على $]2, \infty[$

[٧] د (س) = ١ - ١/س دالة كسرية



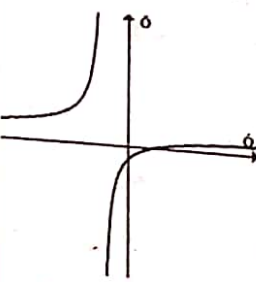
جبرية ، نقطة تماثلها (١, ٠)

ومن الرسم

∴ الدالة متزايدة على

$]-\infty, 0[$ ، $]0, \infty[$

[٨] د' (س) = ٢ - س ، د' (س) = ٠ عندما س = ٢



دالة كسرية

جبرية نقطة تماثلها (٠, ٢)

ومن الرسم نجد أن

الدالة متزايدة على

$]-\infty, 2[$ ، $]2, \infty[$

[١٥] ع' (س) = د' (س) - ر' (س)

∴ د' (س) > ر' (س) ∴ ع' (س) > ٠

∴ ع' (س) متناقصة لكل س ∈ ح

حلول تمارين (٣ - ٢)

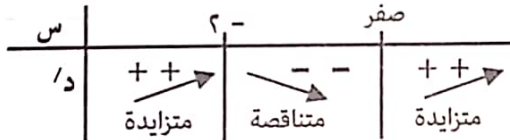
[١] (٠, ٠) عظمى محلية ، (٢, ١) صغرى محلية

[٢] (٢, ١) عظمى محلية ، (٢, ١) صغرى محلية

[٣] (٠, ٠) عظمى محلية ، (١, ١) صغرى محلية

[٤] د' (س) = ٣س + ٦ ، د' (س) = ٠ عندما

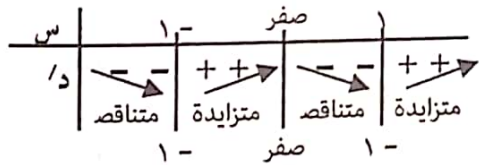
٣س (س + ٢) = ٠ أي س = ٠ ، س = -٢



(-٢, ٠) عظمى محلية ، (٠, ٦) صغرى محلية

[٥] د' (س) = ٤س - ٣ ، د' (س) = ٠ عندما

٤س (س - ١) = ٠ أي س = ٠ ، س = ١

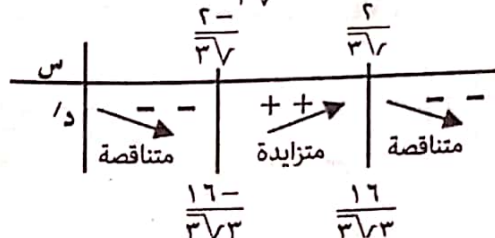


(١, ١) صغرى محلية ، (٠, ٠) عظمى محلية

(١, ١) صغرى محلية

[٦] د' (س) = ٤س - ٣ ، د' (س) = ٠ عندما

٣س = ٠ أي س = ٠



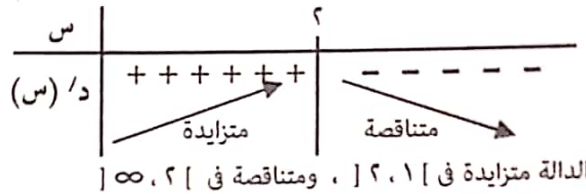
(٣/٤, ١٦/٣) صغرى محلية ، (١٦/٣, ٢) عظمى محلية

محلية

[٩] د' (س) = $\frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 - \sqrt{1-s}}$

د' (س) = ٠ عندما $\frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 - \sqrt{1-s}} = ٠$

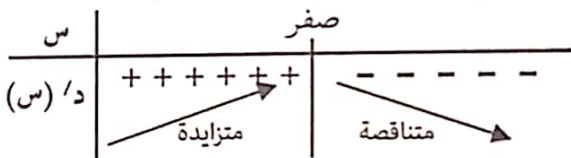
س = ٢ ، مجال الدالة س ≤ ١



[١٠] د' (س) = $\frac{1}{s} + ١$

د' (س) ≠ ٠ ∴ الدالة متزايدة على مجالها ح+

[١١] د' (س) = $\frac{٢}{s} - \frac{٢}{s^٢}$



د (س) متزايدة على (-∞, 0) ، متناقصة على (0, 2)

[١٢] د' (س) = ٤س - ٣ ، د' (س) = ٠

∴ الدالة متناقصة على ح

[١٣] د' (س) = ١ - س ، د' (س) = ٠

وهي موجبة دائما ∴ د (س) متزايدة على [٠, π/٤]

[١٤] د' (س) = -٣س ، د' (س) = ٠ عندما س

π/٣ = س ، عند س = π/٣ ∴ د' (س) > ٠

∴ الدالة متناقصة على [π/٣, ٠]

عند س = π ∴ د' (س) < ٠

∴ الدالة متزايدة على [π/٣, π]

عند س = π/٣ ∴ د' (س) > ٠

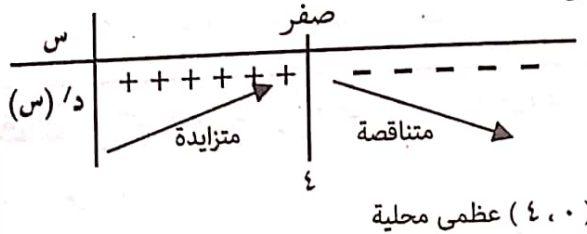
∴ د (س) متناقصة على [π/٣, π]

(١-، ٣-) عظمى محلية ، (٣، ٥) صغرى محلية

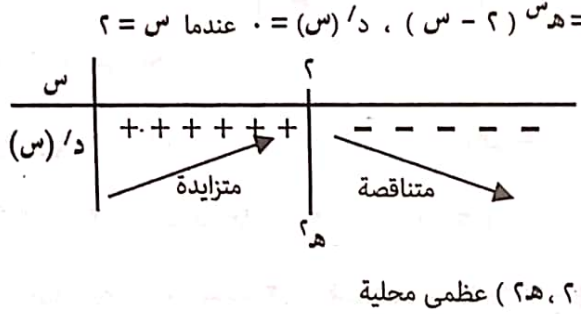
[١٢] د' (س) = $\frac{3-}{2(2-س)}$ ، س ≠ ٢ سالبة دائما

∴ لا توجد قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية

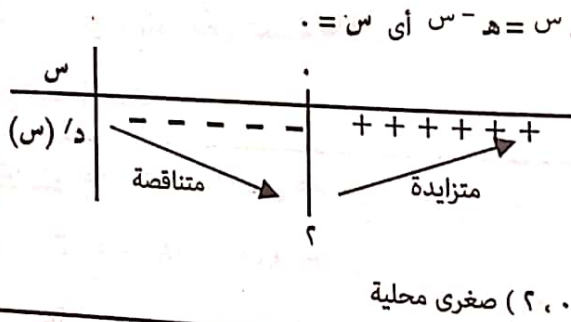
[١٣] د' (س) = $\frac{٨-س}{٢}$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ٤



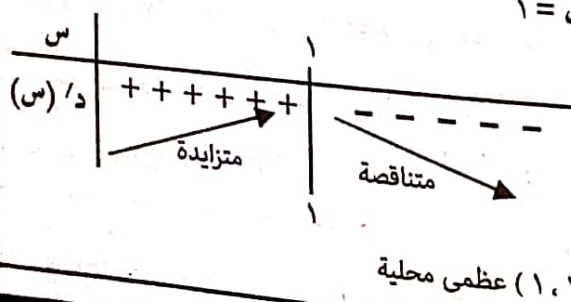
[١٤] د' (س) = $\frac{٨-س}{٢}$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ٢



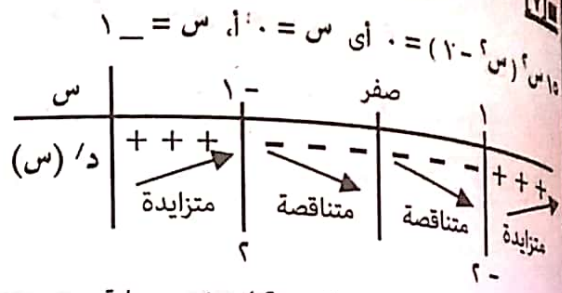
[١٥] د' (س) = $\frac{٨-س}{٢}$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ٨



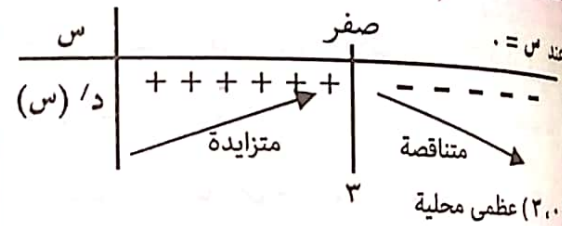
[١٦] د' (س) = $\frac{1}{س} - ١$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ١



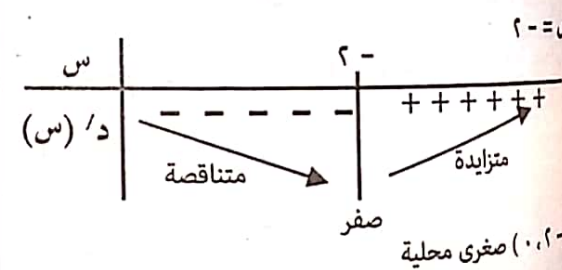
[٧] د' (س) = $\frac{١٥-س}{٢}$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ١٥



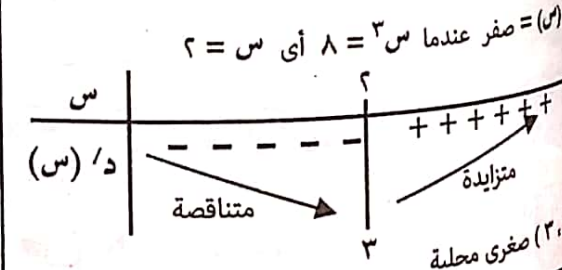
[٨] د' (س) = $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}س$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ٢



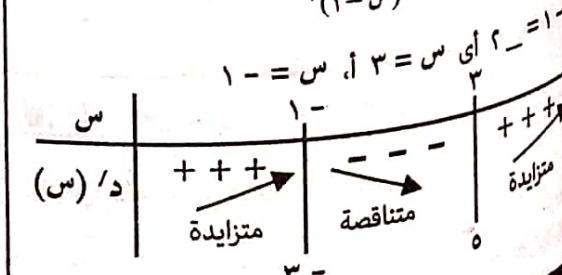
[٩] د' (س) = $\frac{٢}{٣} (٢+س)$ ، د' (س) = ٠ عندما س = -٢



[١٠] د' (س) = $\frac{٨}{٣} - ١ = \frac{٨-٣}{٣}$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ٨

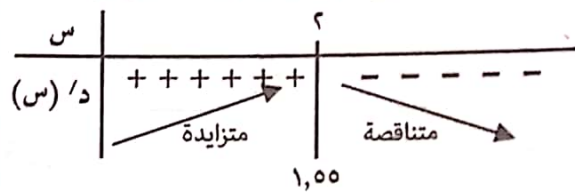


[١١] د' (س) = $\frac{٤}{٢(١-س)}$ ، د' (س) = ٠ عندما س = ١



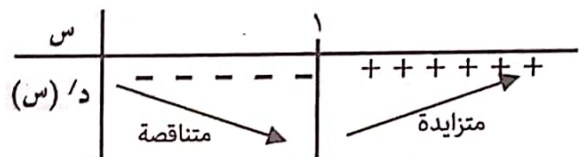
[١٧] د' (س) = $\frac{1}{س} - ٢$ ، د' (س) = ٠ عندما

$٢ = (٢ - س)$ أي $س = ٢$ ، $٢ = -٢$ ح' +



$(٢, ١,٥٥)$ عظمى محلية

[١٨] د' (س) = $١ - س + س$ ، د' (س) = ٠ عندما $س = ١$



$(٠, ١)$ صغرى محلية

[١٩] د' (س) = $١ - (٢ - س)$ ، د' (س) = ٠ عندما $س = ١$

$٣ = (١ - س)$ ، $١ = ٣$ عندما $س = ١$

توجد قيمة عظمى مطلقة = ٣ ، قيمة صغرى مطلقة = ١

[٢٠] د' (س) = $\frac{1}{1-س}$ ، د' (س) = ٠ عندما $س = ١$

توجد قيمة صغرى مطلقة = ١ ،

قيمة عظمى مطلقة = ٢

[٢١] د' (س) = ٠ جتا + ٠ جتا = ١

$١ = ١٨٠$ جتا + ١٨٠ جتا = ١

د' (س) = جتا س - جتا س ، د' (س) = ٠ عندما جتا س = ٠

جتا س أي س = ٤٥° ، ٢٢٥° ، د' (س) = ٤٥ جتا

+ جتا $٤٥ = ٢٢٥$ ، د' (س) = ٢٢٥ جتا + ٢٢٥ جتا = ٢٢٥ جتا

توجد قيمة عظمى مطلقة = ٢٢٥ جتا

قيمة صغرى مطلقة = ٢٢٥ جتا

[٢٢] د' (س) = $٢ - س - س$ ، د' (س) = ٠ عندما $س = ١$

عند $س = ١$ ، $٠ = (١ - س)$ أي $س = ١$ ، د' (س) = ٠

د' (س) = $١ - س$ ، د' (س) = ٠ ، د' (س) = $٢ - س$ ، د' (س) = $٢ - س$

توجد قيمة عظمى مطلقة = $٢ - س$ ، د' (س) = $٢ - س$

قيمة صغرى مطلقة = ٠

[٢٣] د' (س) = $٣ - س + س$ ، د' (س) = ٠ عندما $س = ١$

د' (س) = $٣ - س$ ، د' (س) = $٢ - س$ ، د' (س) = $٢ - س$

$(٠, ٠)$ المنحنى فهي تحقق معادلته $٢ = ٠$ ، د' (س) = ٠

د' (س) = ٠ عند النقطة الحرجة $٢ = ٠$ ، د' (س) = ٠

..... (١) ، عند $س = ٢$ ميل المماس = $٩ - ٠$

$١٢ = ٢ + ٢ + ٢$ ، عند $س = ٢$ ، د' (س) = ٠

$١٨ = ٢ + ٢ + ٢$ ، د' (س) = ٠ ، د' (س) = ٠

تحقق معادلة المنحنى $٢ = ٠$ ، د' (س) = ٠

$١٤ = ٢ + ٢ + ٢$ ، د' (س) = ٠

$(٢) - (١) : ٩ = ٢ + ٢ + ٢$ ، د' (س) = ٠

$(٣) - (٢) : ١٠ = ٢ + ٢ + ٢$ ، د' (س) = ٠

بحل (٤) ، (٥) ، د' (س) = ٠ ، د' (س) = ٠

..... $١٥ = ٢$

حلول تمارين (٣ - ٣)

[١] (ب) $\{٢, ٢ -\}$ (ف) $[٥, ٤ -]$

(ج) $٠, ٠$ (د) $٠, ٤ -$ (هـ) $(٠, ٠)$

(و) ٢ (ز) ٨

[٢] د' (س) = $٦ - س - س$ ، د' (س) = ٠

د' (س) = $٦ - س$ ، د' (س) = $٦ - س$ ، د' (س) = $٦ - س$

المنحنى محدب لأعلى لكل س \exists ح ولا توجد نقط انقلاب

ولأسفل على $[-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ ، $[\frac{2}{3\sqrt{3}}, \infty)$ ،

نقط الانقلاب هي: $(\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ ، $(\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ ،

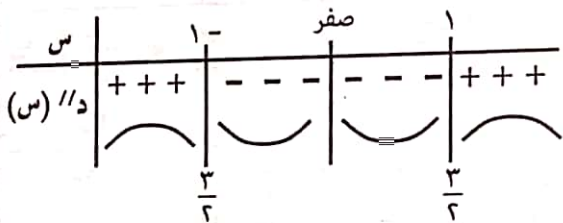
د (س) $\frac{6}{3+s^2} = \frac{6}{3+s^2}$ ، $\therefore \frac{1}{3} \leq \frac{6}{3+s^2} \leq 2$ ،

(س) $12 = (س) (س^2 + 3)$ ،

د (س) $48 = (س) (س^2 + 3) - 3(س^2 + 3) = 12(س^2 + 3) - 3(س^2 + 3)$ ،

$\frac{12(4س^2 - 3س - 2)}{3(س^2 + 3)}$ ، د (س) $= 0$ عندما

$3(س - 1) = 0$ أي $س = 1$ ،



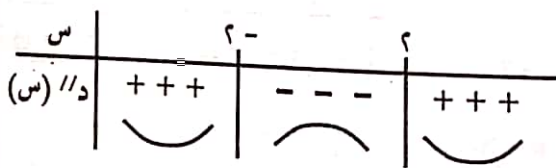
المنحنى محدب لأعلى على $[-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$ ،

ومحدب لأسفل على $[-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$ ،

نقط الانقلاب هي: $(\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ ، $(\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ ،

د (س) $\frac{6}{3+s^2} = \frac{6}{3+s^2}$ ،

د (س) $= 0$ عندما $س = 0$ ،



المنحنى محدب لأعلى على $[-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$ ، ولأسفل على

$[-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$ ، ولاتوجد نقط انقلاب .

د (س) $3 = (س) (س^2 + 3)$ ،

انقلاب

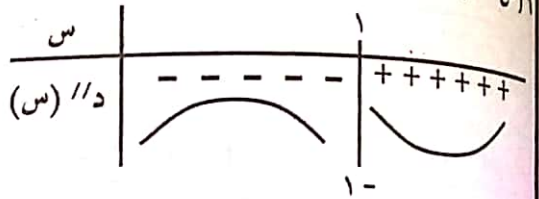
د (س) $\frac{6}{3+s^2} = \frac{6}{3+s^2}$ ، $\frac{6}{3+s^2} > 0$ ، $\frac{6}{3+s^2} < 0$ ،

$\therefore \frac{6}{3+s^2} = 0$ ، $\therefore \frac{6}{3+s^2} = 0$ ، $\therefore \frac{6}{3+s^2} = 0$ ،

د (س) $3س^2 - 3س + 1 = 0$ ، د (س) $3س^2 - 3س + 1 = 0$ ،

د (س) $6س - 6 = 0$ ، د (س) $6س - 6 = 0$ ،

$1 = 0$ ، $1 = 0$ ،



المنحنى محدب لأعلى على $[-\infty, 1]$ ، $[1, \infty)$ ،

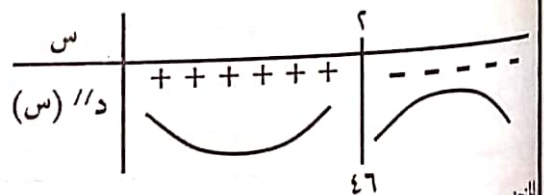
ولأسفل على $[-\infty, 1]$ ، $[1, \infty)$ ، نقطة انقلاب .

د (س) $15س + 6س^2 - 3س = 0$ ، د (س) $15س + 6س^2 - 3س = 0$ ،

د (س) $12س - 12 = 0$ ، د (س) $12س - 12 = 0$ ،

د (س) $6(س - 2) = 0$ ، $س = 2$ ،

د (س) $15(2) + 6(2)^2 - 3(2) = 46$ ،



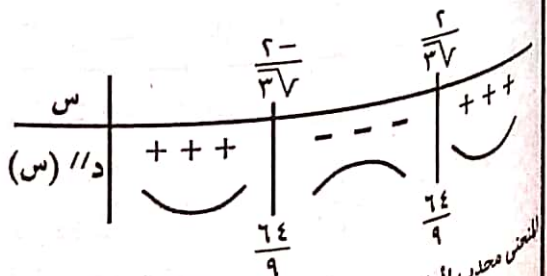
المنحنى محدب لأسفل على $[-\infty, 2]$ ، $[2, \infty)$ ،

ولأسفل على $[-\infty, 2]$ ، $[2, \infty)$ ، نقطة انقلاب

د (س) $8س^2 - 4س + 16 = 0$ ، د (س) $8س^2 - 4س + 16 = 0$ ،

د (س) $16س - 12 = 0$ ، د (س) $16س - 12 = 0$ ،

د (س) $4(س^2 - 3س + 4) = 0$ ، $س = 0$ ، $س = 3$ ،



المنحنى محدب لأعلى على $[\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ ، $[\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ ،

$$س = ٢ = \frac{٣+١}{٢} = \frac{٢س+١}{٢}$$

$$\boxed{١٢} \text{ ص } = \frac{٢س-٢}{٢س+٢} \therefore \text{ ص } /$$

$$= \frac{٢س-٢-٢س(٢س+٢)}{(٢س+٢)^2} = \frac{٢س-٢-٤س^2-٤س}{(٢س+٢)^2} = \frac{-٤س^2-٢س-٢}{(٢س+٢)^2}$$

ص //

$$= \frac{٢س-٢-٢س(٢س+٢)}{(٢س+٢)^2} = \frac{٢س-٢-٤س^2-٤س}{(٢س+٢)^2} = \frac{-٤س^2-٢س-٢}{(٢س+٢)^2}$$

∴ (١، ١) نقطة انقلاب

∴ ص // (١) = صفر ∴ ٢س = ٢ (٣ - ٢) = ٠ (١)

كذلك (١، ١) ∃ المنحنى فهي تحقق معادلته

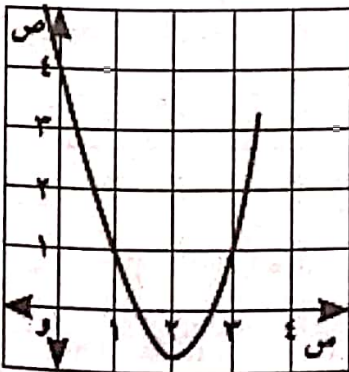
$$\therefore ٠ = ١ \times ٢ + ١ - ٠ \times ٢ + ١ - ٠ \times ١$$

$$\therefore ٠ = ٢ + ١ - ٠ = ٣ \quad (٢)$$

بحل (١)، (٢) ∴ ٣ = ٢، ٠ = ٢، ١ = ٢

والجوابين الأخيرين مرفوضين لأنهما يجعلان الدالة من

الدرجة الأولى ∴ ٣ = ٢ ∴ ٢ = ٢



د (س) متناقصة على

$$] ٢, \infty - [$$

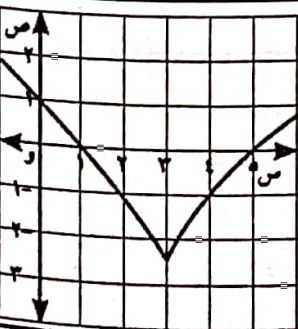
متزايدة على [٢, ٤]

عند س = ٢ قيمة

صغرى محلية

لا توجد نقط انقلاب

نقاط إضافية: (٤، ٠)، (١، ٣)



متناقصة على

$$] ٣, \infty - [$$

متزايدة على [٣, \infty]

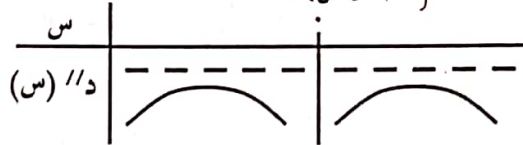
لا توجد نقط انقلاب

$$\therefore \frac{٢}{٢} = \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

$$\left. \begin{aligned} &٢س - ٢ = ٠ \text{ ، } ٢س > ٠ \\ &٢س - ٢ = ٠ \text{ ، } ٢س < ٠ \\ &\text{غير قابلة ، } ٢س = ٠ \end{aligned} \right\} = \text{د (س)}$$

$$\left. \begin{aligned} &٢س - ٢ = ٠ \text{ ، } ٢س > ٠ \\ &٢س - ٢ = ٠ \text{ ، } ٢س < ٠ \end{aligned} \right\} = \text{د // (س)}$$



المنحنى محدب لأعلى على [٠، \infty) ، [٠، \infty)

ولا توجد نقط انقلاب

$$\boxed{١٠} \text{ د (س) } = \frac{٢س-١}{٢س-١} = \text{د (س)} \text{ ، } \frac{٢س-١}{٢س-١} = \text{د (س)}$$

$$\therefore \frac{٢س+١}{٢س-١} =$$

$$= \frac{٢س(٢س-١) - (٢س+١)(٢س-١)}{(٢س-١)^2} = \frac{٢س^2 - ٢س - (٢س^2 - ٢س + ٢س - ١)}{(٢س-١)^2} = \frac{-٢س + ١}{(٢س-١)^2}$$

$$= \frac{-٢س + ١}{(٢س-١)^2} = \frac{-٢س + ١}{(٢س-١)^2}$$

د // (س) = ٠ عندما س = ٠ ∴ (٠، ٠) نقطة انقلاب

ويكون ميل المماس = ظا θ = د (٠) = ١

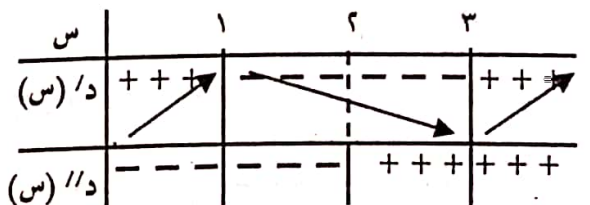
$$\therefore \theta = \text{ظا}^{-١} ١ = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$$

$$\boxed{١١} \text{ د (س) } = \text{س} (٣ - \text{س}) = ٣س - \text{س}^2 = ٩ - ٢س + ٩$$

$$\therefore \text{د (س)} = ٣س - ٢س + ٩ = ٩$$

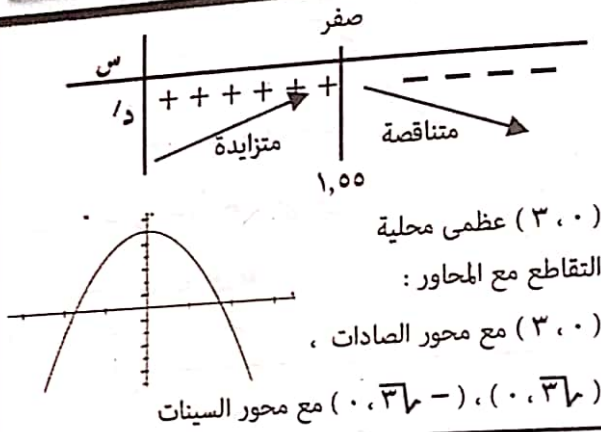
$$\text{د // (س)} = ٦ - ٢س = ٠ \text{ ، د (س) } = ٠ \text{ عندما س = ١}$$

$$\text{د // (س)} = ٣ = ٠ \text{ عندما س = ٢}$$



عند س = ١ قيمة عظمى محلية ، عند س = ٢ قيمة

صغرى محلية ، عند س = ٢ نقطة انقلاب

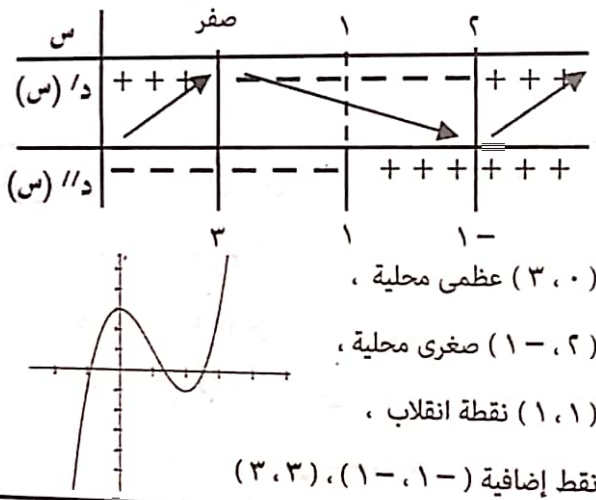


د (س) = س^٣ - س^٢ + ٣

د' (س) = ٣س^٢ - ٢س = ٠ ، د'' (س) = ٦س - ٢ = ٠

د' (س) = ٠ عندما س = ٠ ، س = ٢ ، د'' (س) = ٠

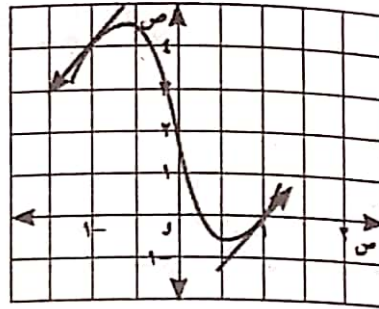
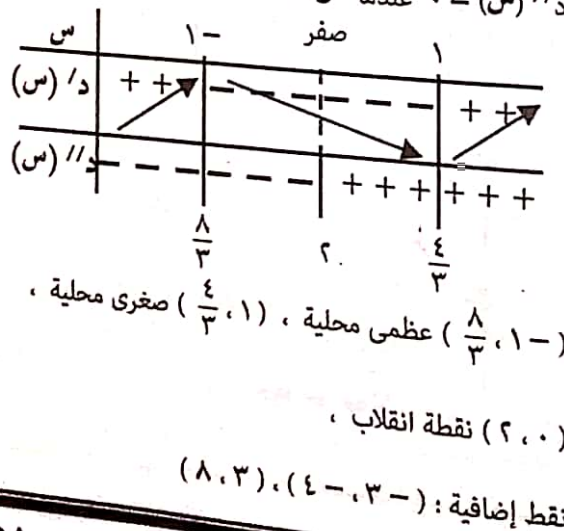
عندما س = ١



د (س) = ١/٣ س^٣ - س^٢ + ٢ ، د' (س) = س^٢ - ٢س = ٠

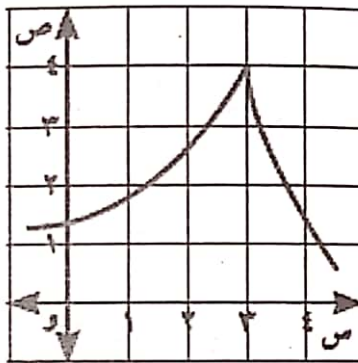
د' (س) = ٠ عندما س = ٠ ، س = ٢ ، د'' (س) = ٢س - ٢ = ٠

د'' (س) = ٠ عندما س = ١



المعنى محذب لأعلى على $]-\infty, 0[$ ومحذب لأسفل على $]0, \infty[$ ، نقطة انقلاب (٢, ٠) ،

نقط إضافية : (٠, ١) ، (٢, ٠) ، (٤, ١ -)

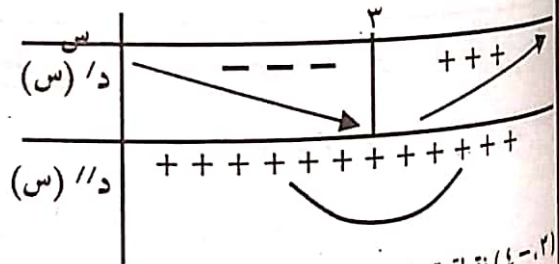


المعنى محذب لأسفل على $]-\infty, 3[$ ، محذب لأعلى على $]3, \infty[$ ، الدالة متزايدة على $]-\infty, 3[$ ، الدالة

متناقصة على $]3, \infty[$ ، لا توجد نقط انقلاب

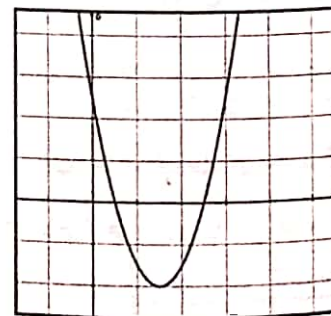
د (س) = س^٢ - ٦س + ٥ ، د' (س) = ٢س - ٦ = ٠ ، د'' (س) = ٢ = ٠

د' (س) = ٠ عندما س = ٣



التقاطع مع المحاور :

(٥, ٠) مع محور الصادات ، (٠, ٠) ، (٠, ١) مع محور السينات



د (س) = س^٣ - ٣س^٢ ، د' (س) = ٣س^٢ - ٦س = ٠ ، د'' (س) = ٦س - ٦ = ٠

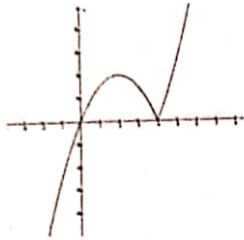
د' (س) = ٠ عندما س = ٠ ، س = ٢ ، د'' (س) = ٠

$$\left. \begin{array}{l} 2-s < 4, \quad s < 4 \\ 2-s > 4, \quad s > 4 \\ \text{غير موجودة}, \quad s = 4 \end{array} \right\} = (s)'$$

$$(s)' = 0 \text{ عندما } s = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s, \quad 2 \\ 2 > s, \quad 2 \end{array} \right\} = (s)''$$

$$(s)'' \neq 0$$



(2, 4) عظمى محلية ،

لا توجد نقط انقلاب ،

نقط إضافية (0, 0)

حلول تمارين (3 - 4)

[1] نفرض العددين هما s ، $s - 30$

$$v = s = (s - 30) \Rightarrow s = 30$$

$$v' = s - 30 = 0 \Rightarrow s = 30$$

$$v'' = -2 < 0 \Rightarrow \text{عند } s = 30 \text{ قيمة عظمى}$$

∴ حاصل ضرب العددين أكبر ما يمكن عندما يكون العددين :

$$10, 10$$

[2] نفرض العددين s ، $s - 5$ حيث $s > 5$

$$r = s^3 + 2(s - 5)$$

$$r' = 3s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = -\frac{2}{3}$$

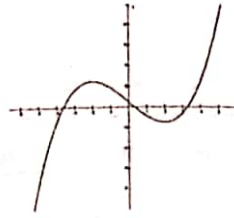
$$r'' = 6s = -4 < 0$$

$$r = (-\frac{2}{3})^3 + 2(-\frac{2}{3} - 5) = -\frac{8}{27} - \frac{22}{3}$$

∴ $s = -\frac{2}{3}$ والآخر مرفوض لأن العددين موجبان

$$r'' = 6s = -4 < 0 \Rightarrow \text{قيمة صغرى}$$

∴ العددين هما 3 ، 2



(2, 4) نقطة انقلاب ،

(0, 4) صغرى محلية ،

(0, 2) عظمى محلية ،

التقاطع مع المحاور :

(2, 0) مع محور الصادات ،

(0, 2) ، (0, 4) مع محور السينات

$$\left. \begin{array}{l} 3-s^2 > 0, \quad s < \sqrt{3} \\ 3-s^2 \geq 0, \quad s \leq \sqrt{3} \end{array} \right\} = (s)''$$

$$(s)' = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \text{الدالة متصلة عند } s = 0$$

$$(s)' \neq 0 \Rightarrow \text{الدالة غير قابلة للاشتقاق عند } s = 0$$

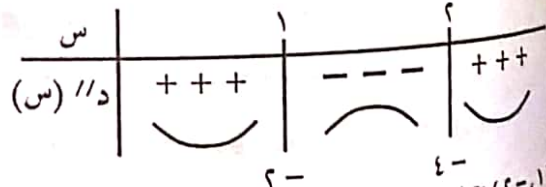
$$s = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 3-s^2 > 0, \quad s < \sqrt{3} \\ 3-s^2 \geq 0, \quad s \leq \sqrt{3} \end{array} \right\} = (s)''$$

$$(s)'' = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{3}$$

$$(s)' = 0 \text{ عندما } s = 0, \pm\sqrt{3}$$

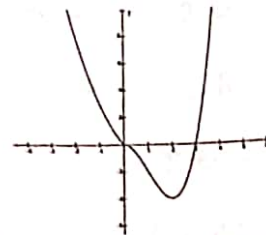
$$(s)'' = 0 \text{ عندما } s = 0$$



(-sqrt(3), 1) نقطة انقلاب ،

(-sqrt(3), 1) صغرى محلية ،

نقط إضافية : (3, 1)



$$\left. \begin{array}{l} (s-4) \leq 0, \quad s \leq 4 \\ (s-4) > 0, \quad s > 4 \end{array} \right\} = (s)''$$

$$(s)' = 0 \Rightarrow s = 4$$

$$\text{الدالة متصلة عند } s = 4$$

$$(s)' \neq 0 \Rightarrow \text{الدالة غير قابلة للاشتقاق عند } s = 4$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $s = 4$

[٣] نفرض العدد هو س ، معكوسه الضرب $\frac{1}{س}$.

$$ص = س + \frac{1}{س} \quad \therefore \quad \frac{1}{س} - 1 = ص$$

$$ص = 1 \quad \text{عندما } س = 1 \quad \therefore \quad \frac{1}{س} = 2 > 0$$

(قيمة صغرى) \therefore العدد المطلوب = 1

[٤] الطول + العرض = $\frac{1}{٦٠}$ المحيط = ٦٠

نفرض الطول = س ، العرض = ٦٠ - س \therefore المساحة =

$$\text{الطول} \times \text{العرض} = س(٦٠ - س) = ٦٠س - س^2$$

$$س = ٦٠ - س \quad \therefore \quad س = ٣٠ \quad \text{عندما } س = ٣٠$$

$$س = ٣٠ - س \quad \therefore \quad س = ١٥ \quad \text{(قيمة عظمى)}$$

\therefore أكبر مساحة عندما تكون الأرض مربعة

وطول ضلعها ٣٠ متر

وتكون المساحة عندئذ $٩٠٠ = ٣٠ \times ٣٠$ متر مربع

[٥] محيط القطاع = $س + ٢نوه = ٣٠$ \therefore ل $٣٠ - س = ٢$

$$نوه = س \quad \therefore \quad \frac{1}{س} = \frac{1}{٢} \quad \therefore \quad س = ٢$$

$$١٥ - نوه = س \quad \therefore \quad س = ١٥ \quad \text{عندما } س = ١٥$$

أى نوه = ٧,٥ سم ، $٢ - س > ٠$ (قيمة عظمى)

[٦] ٨ س + ٤ ص = ٢٤٠ \therefore ص = ٦٠ - ٢س

$$\therefore \quad ح = س = ص = س(٦٠ - س) = ٦٠س - س^2$$

$$\therefore \quad ح = ١٢٠ - س \quad \therefore \quad س = ٦٠ \quad \text{عندما } س = ٦٠$$

$$س = (٢٠ - س) \quad \therefore \quad س = ٢٠ \quad \therefore \quad ح = ١٢٠ - ٢٠ = ١٠٠$$

س = ١٢٠ - ١٢ (٢٠) > ٠ (قيمة عظمى)

\therefore أبعاد العلبة هي: ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

[٧] $\frac{1}{س} = س(١٠٠ - س) \quad \therefore \quad \frac{1}{س} = ١٠٠ - س$

$$= \frac{1}{س} + س = ١٠٠ \quad \therefore \quad س = ١٠٠ - \frac{1}{س}$$

$$(١٠٠ - س) \frac{1}{س} = ١٠٠ - س \quad \therefore \quad س = ١٠٠ \quad \text{عندما } س = ١٠٠$$

$$\frac{1}{س} = ١٠٠ - س \quad \therefore \quad س = ١٠٠ \quad \therefore \quad ح = ١٠٠ - ١٠٠ = ٠$$

$$(٥٠ - س) = س(١٠٠ - س) \quad \therefore \quad س = ٥٠ \quad \text{عندما } س = ٥٠$$

$$س = ٥٠ \quad \text{(قيمة عظمى)}$$

\therefore طولى ضلعى القائمة هما ٥٠ ، ٥٠ سم

[٨] $٢س + ص = ٨٠٠$ \therefore ص = ٨٠٠ - ٢س

$$س = ص = س(٨٠٠ - ٢س) = ٨٠٠س - ٢س^2$$

$$س = ٨٠٠ - ٢س \quad \therefore \quad س = ٢٠٠ \quad \text{عندما } س = ٢٠٠$$

$$س = ٨٠٠ - ٢س \quad \therefore \quad س = ٤٠٠ \quad \text{عندما } س = ٤٠٠$$

$$٤٠٠ = س \quad \therefore \quad س = ٤٠٠ \quad \text{عندما } س = ٤٠٠$$

$$٨٠٠٠٠ = س^2$$

[٩] $س = \frac{ع}{نوه} \quad \therefore \quad ع = س \times نوه$

$$\therefore \quad س = \frac{ع}{نوه} \quad \therefore \quad ع = س \times نوه$$

$$س = س \times نوه + ع = س \times نوه + س \times نوه$$

$$س = س \times نوه + س \times نوه \quad \therefore \quad س = ٢س \quad \therefore \quad س = ٢$$

$$س = ٢ \quad \text{عندما } س = ٢ \quad \therefore \quad ع = ٢ \times ٢ = ٤$$

$$\therefore \quad \text{أقل قدر من المادة عندما } س = ٢ \quad \therefore \quad ع = ٤$$

[١٠] محيط الملعب = ٤٢٠ متر

$$\therefore \quad س + ٢ص = ٤٢٠$$

$$\therefore \quad س + ٢ص = ٤٢٠ \quad \therefore \quad ص = ٢١٠ - \frac{س}{٢}$$

$$\therefore \quad ص = ٢١٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٤٢٠$$

$$س = ٤٢٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٨٤٠$$

$$س = ٨٤٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٨٤٠$$

$$س = ٨٤٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٨٤٠$$

$$س = ٨٤٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٨٤٠$$

$$\therefore \quad س = ٨٤٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٨٤٠$$

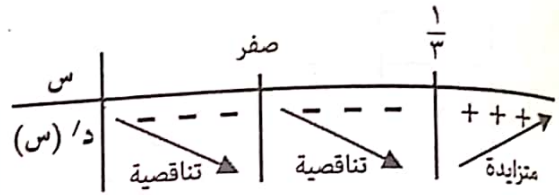
$$ص = ٢١٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad ص = ٢١٠ - \frac{٨٤٠}{٢} = ٢١٠ - ٤٢٠ = -٢١٠$$

\therefore الملعب يكون دائرياً مساحته

$$س = ٨٤٠ - \frac{س}{٢} \quad \therefore \quad س = ٨٤٠$$

الممسوحة ضوئياً بـ CamScanner

[١١] د (س) = س^٤ - س^٤ س^٣ ∴ د' (س) = س^٤ - ٣س^٣ = ٠
 عند س = ٣ ، د' (س) = ٠ ∴ عندما س = ٣ ، د (س) = ٠
 ∴ س = ٠ ، س = ٣



[١٢] د (س) = ١ + ١/س ∴ د' (س) = -١/س^٢

بوجبة دائماً ∴ الدالة متناقصة على ح - {٠}

[١٣] د (س) = س/س + ٢ = ١ + ٢/س ∴ د' (س) = -٢/س^٢

د (س) = ٢/س^٢ < ٠ دائماً

∴ الدالة متزايدة على ح - {٢}

[١٤] د (س) = √(١ - س) ∴ د' (س) = -١/(٢√(١ - س))

د (س) = ١/(٢√(١ - س)) < ٠ دائماً

∴ الدالة متزايدة على ح - {١}

[١٥] د (س) = (١ - س)^٢ ∴ د' (س) = ٢(١ - س) = ٠

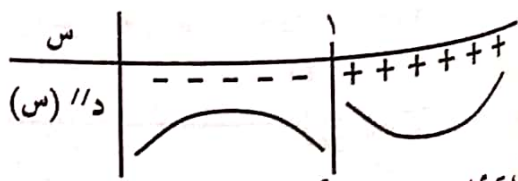
د (س) = ٢ < ٠ دائماً

∴ المنحنى محدب لأسفل على ح

[١٦] د (س) = س^٣ - ٣س^٢

د' (س) = ٣س^٢ - ٦س = ٠ ∴ د' (س) = ٣س(س - ٢) = ٠

د (س) = ٠ عندما س = ١

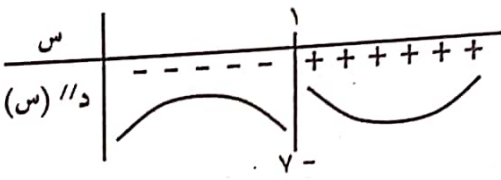


نقطة انقلاب (٢، ٠)

محدب لأعلى على [١، ∞) ، محدب لأسفل على (-∞، ١]

[١٧] د (س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩

د' (س) = ٣س^٢ - ١٢س = ٠ ∴ د' (س) = ٣س(س - ٤) = ٠
 ∴ س = ٠ ، س = ٤

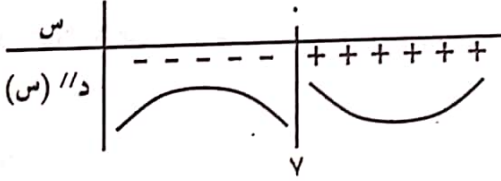


نقطة الانقلاب: (٢، ٤)

التحدب: لأعلى على [-∞، ٢] ، ولأسفل على [٢، ∞)

[١٨] د (س) = س^٣ - ١٢س^٢ + ٧

د' (س) = ٣س^٢ - ٢٤س = ٠ ∴ د' (س) = ٣س(س - ٨) = ٠
 ∴ س = ٠ ، س = ٨

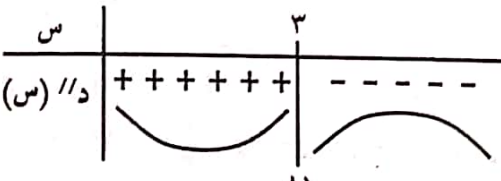


نقطة الانقلاب: (٨، ٠)

التحدب: لأعلى على [-∞، ٨] ، ولأسفل على [٨، ∞)

[١٩] د (س) = س^٦ - ٣س^٤

د' (س) = ٦س^٥ - ١٢س^٣ = ٠ ∴ د' (س) = ٦س^٣(س - ٢) = ٠
 ∴ س = ٠ ، س = ٢



نقطة الانقلاب: (٢، ٨)

التحدب: لأسفل على [-∞، ٢] ، ولأعلى على [٢، ∞)

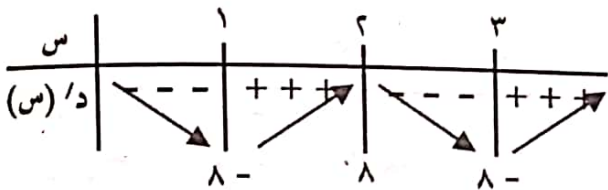
[٢٠] د (س) = س^٢ - ١/س ∴ د' (س) = ٢س + ١/س^٢

د' (س) = ٢ - ١/س^٢ = ٠ ∴ د' (س) = ١/س^٢ = ٠

س = ٢ ، س = ١٦

■ [٢٤] د (س) = س^٤ - ٨ س^٢ + ٨ ؛ د' (س) = ٤ س^٣ - ١٦ س

٠ = د' (س) عندما ٤ س (س^٢ - ٤) = ٠ .
 ∴ س = ٠ ، أ ، س = ٢



(٢ - ، ٨ -) نقطة قيمة صغرى محلية

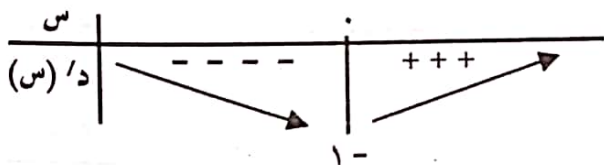
(٨ ، ٠) ، (٨ - ، ٢) نقطة قيمة عظمى محلية ،
 صغرى محلية

■ [٢٥] د (س) = $\frac{٣-٢س}{٢-س}$ ،

$$د' (س) = \frac{٢س(١+٢س) - (٣-٢س)٢}{(١+٢س)^٢}$$

$$= \frac{٢س٢ + ٤س٣ - ٣س٢ + ٤س}{(١+٢س)^٢} = \frac{٤س}{(١+٢س)^٢}$$

د' (س) = ٠ عندما س = ٠



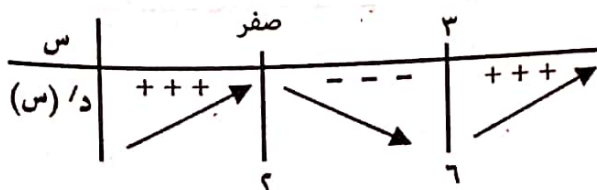
(٠ ، ١) نقطة قيمة صغرى محلية

■ [٢٦] د (س) = $\frac{٣-٢س}{٢-س}$ ،

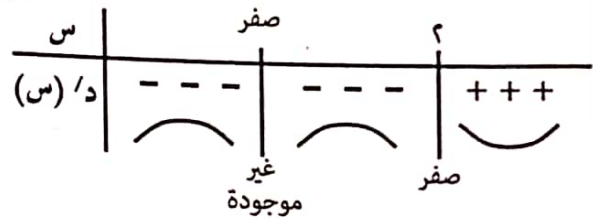
$$د' (س) = \frac{٢س(٢-س) - (٣-٢س)^٢}{(٢-س)^٢}$$

$$= \frac{٢س٢ - ٤س٣ - ٩ + ١٢س - ٤س٢}{(٢-س)^٢} = \frac{٣ + ٤س - ٢س٢}{(٢-س)^٢}$$

عندما (س - ٣)(٣ - س) = ٠ ∴ س = ٣ ، أ ، س = ١



(٢ ، ١) نقطة قيمة عظمى محلية ، (٦ ، ٣) نقطة قيمة
 صغرى محلية



نقط الانقلاب : (٠ ، ٢)

التحذب : لأسفل على [٠ ، ٢] ، ∞ - [٢ ، ∞)

ولأعلى على [٢ ، ∞)

■ [٢٧] د (س) = س^٤ - ٦ س^٢ + ٩ ∴ س^٢ = ٣

د' (س) = ٤ س^٣ - ١٢ س = ٠

عندما س = ٠ ، ٣ -

د' (٣) = ٠ > ٣ - ∴ (١٣ ، ٣ -) عظمى محلية

■ [٢٨] د (س) = س^٣ - ٣ س^٢ + ٧

∴ د' (س) = ٣ س^٢ - ٦ س = ٠ ، د' (س) = ٠ عندما

س = ٠ ، أ ، س = ١

د' (١) = ١٢ - ٦ = ٦

د' (٠) = ٠ > ٦ - ∴ (٠ ، ١) قيمة عظمى محلية

د' (١) = ١٢ - ٦ = ٦ > ٠ ∴ (١ ، ٦) قيمة صغرى محلية

∴ (٧ ، ٠) عظمى محلية ، (٦ ، ١) صغرى محلية

■ [٢٩] د (س) = س(٢ - س)

س = (س - ٢) - س^٢ = ٤ - ٣ س + س^٢ = ٤ + س^٢ - ٣ س

د' (س) = ٢ س - ٣ = ٨ - س + ٤ = ٠ ، د' (س) = ٠ عندما

س = ٣ (٢ - س) = ٠

∴ س = ٢ ، أ ، س = $\frac{٢}{٣}$ ، د' (٨ - س) = ٨ - س ، د' (٢) = ٨ - ٢ = ٦

(٢) = ٨ - ٢ = ٦

∴ د (٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

د' (٢) = $\frac{٢}{٣}$ > ٠ ∴ (٢ ، ٨ - ٤) = $\frac{٢}{٣}$

∴ د (٢) = $\frac{٣٢}{٩}$ قيمة عظمى محلية

$$د (٢) = (٢) = ٢(٢) - ١٢ + (٢) = ١٦ + ٠ = (٢) \text{ (صغرى مطلقة)}$$

$$د (٥) = (٥) = ٢(٥) - ١٢ + (٥) = ١٦ + ٨ = (٥) \text{ (عظمى مطلقة)}$$

$$[٣٢] \text{ د (س) } = (س) = ٢ + ٤ = ٦, \text{ د (س) } = (س) = ٤ + ٣ = ٧$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٠$$

$$د (١-) = (١-) = ٢ + ٤(١-) = ٣, \text{ د (٠) } = (٠) = ٢ \text{ (صغرى مطلقة)}$$

$$\text{د (٢) } = (٢) = ٢ + ١٦ = ١٨ \text{ (عظمى مطلقة)}$$

$$[٣٣] \text{ د (س) } = (س) = ٢س - ٤س + ١ = ١ - ٢س$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٨س - ٣س = ٥س, \text{ د (س) } = (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٠$$

$$\text{د (س) } = (س) = ١ - ٢س = ٠ \text{ عندما } س = ٠, \text{ د (س) } = (س) = ١ \pm \frac{١}{٢}$$

$$\text{د (١-) } = (١-) = ٢(١-) - ٤(١-) + ١ = ٢ - ٢ = ٠ \text{ (قيمة عظمى)}$$

$$\text{مطلقة () } = () = ٢(\frac{١}{٢}) - ٤(\frac{١}{٢}) + ١ = \frac{٧}{٨}$$

$$\text{(قيمة صغرى مطلقة)}$$

$$\text{د (٠) } = (٠) = ١ + ٢(٠) - ٤(٠) = ١$$

$$\text{د (} \frac{١}{٢} \text{) } = (\frac{١}{٢} \text{) } = ١ + ٢(\frac{١}{٢}) - ٤(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}$$

$$\text{د (١) } = (١) = ٢ + ١ - ٤(١) = ١ - ٢ = -١ \text{ (قيمة عظمى مطلقة)}$$

$$[٣٤] \text{ د (س) } = (س) = (س) = ١٢ - ٣س = ١٢ - ٣س$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٣س - ١٢ = ٠ \text{ عندما } س = ٤$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٣(٤ - ١) = ٩ \text{ (آخر مرفوض)}$$

$$\text{د (١-) } = (١-) = (١-) = ١٢ - ٢(١-) = ١٠$$

$$\text{د (٢) } = (٢) = (٢) = ١٢ - ٤ = ٨ \text{ (قيمة صغرى مطلقة)}$$

$$\text{د (٤) } = (٤) = (٤) = ١٢ - ١٦ = -٤ \text{ (قيمة عظمى مطلقة)}$$

$$[٣٥] \text{ د (س) } = (س) = (س) = (١ - س)(٢ - س)$$

$$\text{د (س) } = (س) = (س) = (١ - س)(٢ - س) = ٢ - ٣س + ٢س = ٢ - س$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢, \text{ د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$

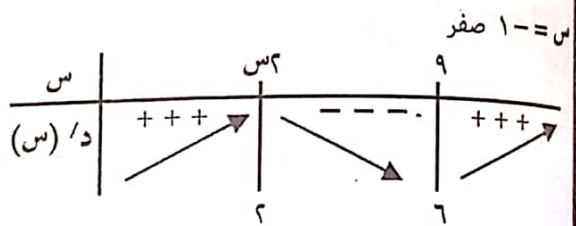
$$\text{د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢, \text{ د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢, \text{ د (س) } = (س) = ٢ - س = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$

$$[٢٧] \text{ د (س) } = (س) = \frac{٤ - س}{٩ + ٢س}, \text{ د (س) } = (س) = \frac{٤ - س}{٩ + ٢س}$$

$$\text{د (س) } = (س) = \frac{(٩ - س - ٢س) - (٩ - س - ٢س)}{(٩ + ٢س)^2} = \frac{٩ - ٢س - ٢س - ٩}{(٩ + ٢س)^2} = \frac{-٤س}{(٩ + ٢س)^2}$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٠, \text{ د (س) } = (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٠$$



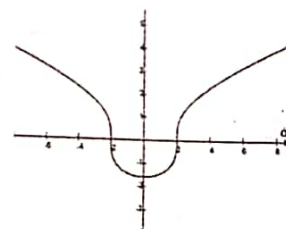
$$\text{نقطة (} \frac{١}{١٨}, ٩ \text{) (قيمة صغرى محلية), نقطة (} \frac{١}{١٨}, ٩ \text{) (قيمة عظمى محلية)}$$

$$[٢٨] \text{ د (س) } = (س) = \frac{٢}{٣} (٢ - س) = \frac{٤}{٣} - \frac{٢}{٣} س$$

$$\text{د (س) } = (س) = \frac{٢}{٣} (٢ - س) = \frac{٤}{٣} - \frac{٢}{٣} س, \text{ د (س) } = (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$



$$\text{نقطة (} ٠, ٢ \text{) (قيمة صغرى محلية)}$$



$$\text{نقطة (} ١, ٦ \text{) (قيمة صغرى محلية)}$$

$$[٣٠] \text{ د (س) } = (س) = ٩ - ٣س = ٩ - ٣س$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٩ - ٣س = ٠ \text{ عندما } س = ٣, \text{ د (س) } = (س) = ٩ - ٣س = ٠ \text{ عندما } س = ٣$$

$$\text{د (س) } = (س) = ٩ - ٣س = ٠ \text{ عندما } س = ٣, \text{ د (س) } = (س) = ٩ - ٣س = ٠ \text{ عندما } س = ٣$$

$$[٣١] \text{ د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ١٦ + ٣س$$

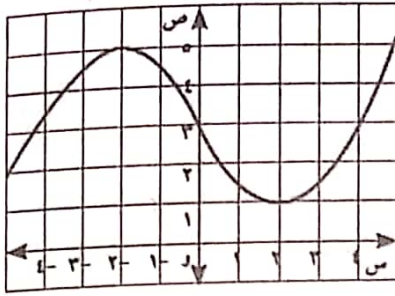
$$\text{د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}, \text{ د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}$$

$$\text{د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}, \text{ د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}$$

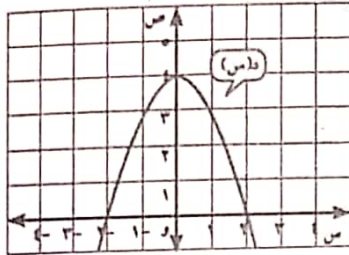
$$\text{د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}, \text{ د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}$$

$$\text{د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}, \text{ د (س) } = (س) = ١٦ + ٣س = ٠ \text{ عندما } س = -\frac{١٦}{٣}$$

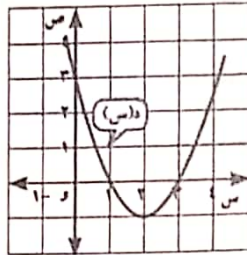
[٤٠]



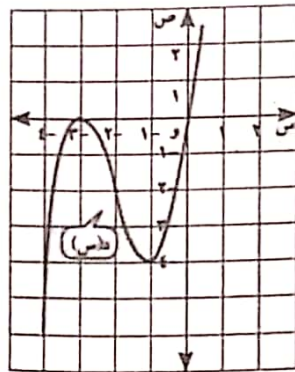
[٤١]



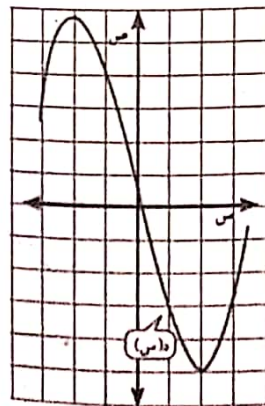
[٤٢]



[٤٣]



[٤٤]



$$د (٠) = (١ -) (٢ -) = ٤ - (قيمة صغرى مطلقة)$$

$$د (٥) = (٤) (٣) = ٣٦ (قيمة عظمى مطلقة)$$

$$د (٢/٣) = (١/٣ -) (٤/٣ -) = ١٦/٢٧$$

$$د (٢) = (١) (٠) = ٠$$

$$[٣٦] د (س) = \begin{cases} ٣س٣ - ٣س٢, & س \geq ٠ \\ ٢س٢ - ٢س, & س < ٠ \end{cases}$$

$$د' (س) = \begin{cases} ٣س٢ - ٢س, & س > ٠ \\ ٢س - ٢, & س < ٠ \\ \text{غير موجودة}, & س = ٠ \end{cases}$$

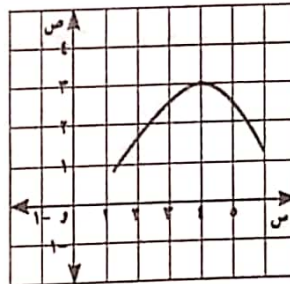
$$د' (س) = ٠ \text{ عندما } س = ١$$

$$د (٣ -) = (٣ -) (٣ -) = ٣ - ٣ (٣ -) = ٥٤ - (قيمة صغرى مطلقة)$$

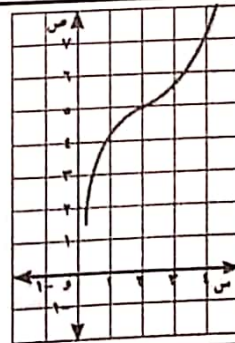
$$د (٣) = (٣) (٢ - (٣)) = ٣ (قيمة عظمى مطلقة)$$

$$د (٠) = ٠, د (١) = (١) (٢ - (١)) = ١$$

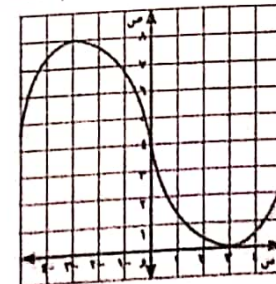
[٣٧]

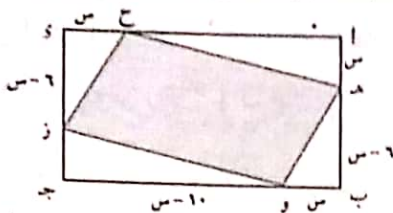


[٣٨]



[٣٩]





[٤٩]

$$^2(هـ ح) = ^2س + ^2(س - ١٠) = ^2(و ز)$$

$$^2(هـ و) = ^2س + ^2(س - ٦) = ^2(ح ز)$$

∴ الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع

مساحة متوازي الأضلاع = م = مساحة المستطيل ٦ ب ج د -

$$^2 [(م \Delta هـ ح) + (م \Delta هـ ب و)]$$

$$= ١٠ \times ٦ - ٢ [(س - ٦) س + (س - ١٠) س]$$

$$= ٦٠ - ١٠ س + ٦ س - ٢ س + ٢ س = ٦٠ - ٢ س$$

$$= ٢ س - ١٦ + ٦٠ = ٤٤ - ٢ س$$

$$عندما س = ٤ ، ٤ = ١١ م ، ٤ < ٠ (قيمة صغرى)$$

أصغر مساحة = ٢ (٤) = ١٦ - ٢ (٤) = ٨ وحدة مربعة

$$[٥٠] \text{ نه } ^2ع - ^2ج = ^2ع - ٢٢٥$$

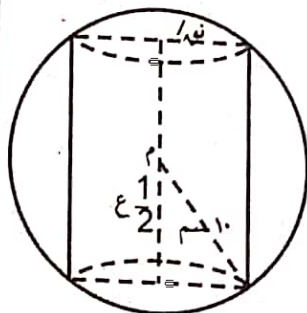
$$ح = \frac{\pi}{3} \text{ نه } ^2ع = \frac{\pi}{3} (ع - ٢٢٥) = \frac{\pi}{3} (ع - ٢٢٥)$$

$$ح = \frac{\pi}{3} (ع - ٢٢٥) ، ح = ٠ عندما$$

$$ع = \frac{٢٢٥}{٣} ، ح = \frac{\pi}{3} \times ٦ - ع = ٢ - \frac{\pi}{3}$$

$$ح = \frac{\pi}{3} \times \frac{١٥}{٣} - \frac{٢٢٥}{٣} = \frac{\pi}{3} (١٥ - ٢٢٥)$$

$$= ٢٥٠ \pi \sqrt[3]{٣} \text{ وحدة مكعبة}$$



[٥١] نه للأسطوانة

$$= ١٠٠ - \frac{١}{٤} ع$$

حجم الأسطوانة = ح

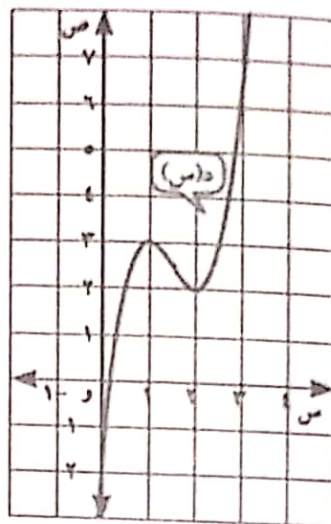
$$= \text{نه } ^2ع$$

$$= \pi (ع - \frac{١}{٤} ع)$$

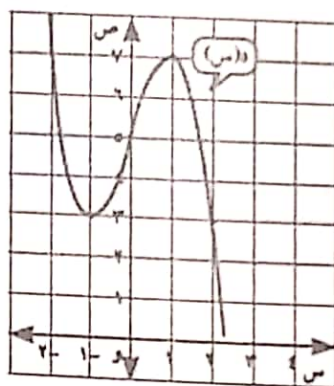
$$= \pi (ع - \frac{١}{٤} ع) = \pi (ع - \frac{١}{٤} ع) = \pi (ع - \frac{١}{٤} ع)$$

$$ح = ٠ عندما ع = \frac{٤٠٠}{٣} = ١٣٣.٣٣$$

$$ح = \pi (ع - \frac{١}{٤} ع) = \pi (١٣٣.٣٣ - \frac{١}{٤} \times ١٣٣.٣٣)$$



[٤٥]



[٤٦]

[٤٧] د (س) = ٣ س + ٢ ب + ٢ ج + ٥ (١)

د' (س) = ٣ س + ٢ ب + ٢ ج + ٥ (٢)

∃ (٦, ٠) المنحنى ومن (١) ∴ ٦ = ٥ ، د' (٠) = ٠

∴ ج = ٠ ، ∃ (٥, ١) المنحنى ومن (١) ∴

٥ = ٦ + ب + ٢ = ٥ ∴ ب = ١ - ١ = ٠ (٣)

د' (١) = ٠ ∴ ٠ = ٣ + ٢ ب = ٠ (٤)

يحل (٣)، (٤) ∴ ٢ = ٢ ، ٣ = ٣

[٤٨] الطول + العرض = $\frac{1}{2}$ المحيط = ١٠ ، بفرض الطول

= س ، العرض = ١٠ - س ∴ م = س (١٠ - س)

= ١٠ س - س^٢ ∴ م = ١٠ - س ، م = ٠ عندما

س = ٥ ، م = ٠ ∴ م = ٠ (قيمة عظمى) ∴ المساحة

تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الشكل مربعاً أبعاده ٥ ، ٥ متر

■ [٥٤] ح = حجم متوازي المستطيلات + حجم الأسطوانة

$$\therefore ٢٧ = (٢ \text{ س}) \times \pi + \text{س} \times \pi$$

$$٢٧ = \pi \text{ س} + \pi \text{ س}^٢ \quad \therefore \text{س} = \frac{٢٧ - \pi \text{ س}^٢}{\pi}$$

م = المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات + المساحة الجانبية

فقط للأسطوانة = ٨ س × س + (٢ س) (٢ س) π

$$٨ \text{ س} + ٨ \text{ س}^٢ = \frac{\pi (٢٧ - \pi \text{ س}^٢) \text{ س}}{\pi} + ٨ \text{ س}^٢$$

$$٨ \text{ س} + ٨ \text{ س}^٢ = \frac{٢٧ \pi \text{ س}}{\pi} + ٨ \text{ س}^٢ \quad \therefore ٨ \text{ س} = ٢٧ \text{ س}$$

$$\therefore ٨ = ٢٧ \quad \therefore \text{س} = \frac{٢٧}{٨}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٢} \quad \therefore \text{م} = ١٦ < ٠ \quad (\text{قيمة صغرى})$$

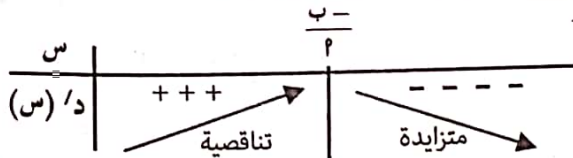
اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة الثالثة

■ [١] (١) $[-\infty, ٢]$ (ب) $\text{س} = ٢$

(ج) $\text{س} = ٥$

(د) $[-\infty, ٠] \cup [١, \infty]$

■ [٢] د' (س) = ٢ س + ب ، $٢ > ٠$



(١) د' (س) = ٠ عندما س = توجد قيمة عظمى محلية

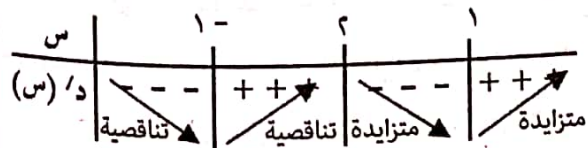
(ب) الدالة متزايدة على $[-\infty, ٠]$ ،

، الدالة متناقصة على $[١, \infty]$

■ [٣] د (س) = (١ - س) ، د' (س) = -٢ س ، د' (س) غير

موجودة عندما س = ٠ ، د' (س) = ٠ ، د' (س) غير

موجودة عندما س = ١



∴ نقطة حرجية (٠، ١) ، (٠، ١) ، (١، ٠)

■ [٥٢] ∴ (٢ س - س) ≤ ٠ لأنه مربع كامل

$$\therefore ٢ \text{ س} - \text{س}^٢ \leq ٠ \quad \therefore \text{س} \leq ٢$$

$$\therefore ٢ \text{ س} - \text{س}^٢ \leq ٠ \quad \therefore \text{س} \leq ٢$$

$$\therefore \frac{٢ \text{ س} + ٢}{\text{س}} \leq ٢$$

$$\therefore \frac{١}{٢} \geq \frac{٢}{٢ \text{ س} + ٢}$$

■ [٥٣] حساب نقطة ج: $\left(\frac{٢ \text{ س}}{٤}\right)$ $\text{س} = ٤$

$$\therefore \frac{٢ \text{ س}}{١٦} = ٤ \quad \therefore \text{س} = ٦٤$$

$$\therefore \text{س} = ٤ \quad \therefore \text{ج} = (٤، ٤)$$

حساب نقطة پ: $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٨$ ، $\text{ص} = ٢$

$$\therefore (٢، ٢) = ٩$$

حساب نقطة ب: $\text{ب} = \left(\frac{٢ \text{ س}}{٤}\right)$

$$\left| \begin{array}{cc} ١ & ٤ \\ ١ & ٢\sqrt{٢} \end{array} \right| \frac{١}{٢} = ٢$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\left(\frac{٢ \text{ س}}{٤} - ٢ \right) - (٢ - \text{س}) \right]$$

$$+ \left[(٨ - ٢\sqrt{٢}) - \frac{١}{٢} \right] = ٨ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$+ ٢ - ٢\sqrt{٢} + ٤ = ٨ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$= ٨ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢} + ٢ = ١٠ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$= ١٠ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢} = ١٠ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$= ١٠ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢} = ١٠ - ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = ٤ - ٢\sqrt{٢}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} > ٠ \quad (\text{قيمة عظمى})$$

$$\therefore \text{أكبر مساحة} = \frac{١}{٤} (٢ - ٢\sqrt{٢}) + (٢ - ٢\sqrt{٢})$$

$$= \frac{١}{٤} (٨ - ٢\sqrt{٢} - ١٦) + (٢ - ٢\sqrt{٢})$$

$$+ ٨ - ٨ + ٢ - ٢\sqrt{٢} = ٢ - ٢\sqrt{٢}$$

$$= ٢ - ٢\sqrt{٢} = ٢ - ٢\sqrt{٢}$$

$$= (س - ٥) (س - ١٠) (س - ٥) ,$$

$$ر' = ٠ \text{ عندما } س = ٥ , س = ١٠ , س = ٥$$

$$(٥, ٠) \leftarrow ١٢٥ \times ٠ , (٠, ٥) \leftarrow ٠ \times ٢٥ ,$$

$$(٣, ٢) \leftarrow ٢٧ \times ٤ = ١٠٨$$

$$\therefore \text{ الزوج المرتب المطلوب } = (٣, ٢)$$

$$أ : \text{ عند } س = ٢ \text{ نجد أن } ر' > ٠ \text{ (قيمة عظمى)}$$

$$[٨] \text{ و } (س, س + ١ + ٤ - س - س) =$$

$$ج = (س, \frac{س + ٢}{٢}) , ب = (س, ٠)$$

$$(ج) = (٠ - ٠) + (١ + ٤ - س - س - \frac{س}{٢} - ١) =$$

$$= (\frac{٧}{٢} س - س) =$$

$$\therefore \text{ ج } = \frac{٧}{٢} س - س \iff \text{ ف } = \frac{٧}{٢} س - س$$

$$\text{ف}' = \frac{٧}{٢} - س , \text{ ف}' = ٠ \iff س = \frac{٧}{٢} , (قيمة عظمى)$$

$$\text{ف}' = ٠ \text{ عندما } س = \frac{٧}{٢} \therefore س = \frac{٧}{٤}$$

$$\therefore ب = (٠, \frac{٧}{٤})$$

حلول اختبارات كتاب لامى على الوحدة الثالثة

الإختبار الأول

السؤال الأول :

(١) صفر

(٢) ٣

(٣) نقطة حرجة

(٤) د'' (س) < ٠ على الفترة] -٢ , ٥ [

السؤال الثاني :

(٢) محدب لأعلى على] -٢ , ٥ [و محدب لأسفل على] ٣ , ٥ [

(٣) نقطة انقلاب (١٥٩ - ٣) ,

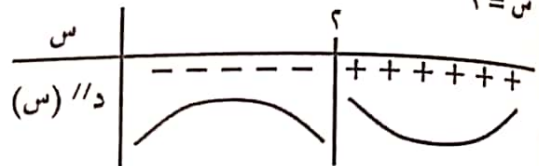
(٢) ب = ٥ , صغرى محلية

$$[٤] \text{ د } (س) = س^٣ - ٦س^٢ + ١٢س ,$$

$$\text{د}' (س) = ٣س^٢ - ١٢س + ١٢ , \text{ د}' = ٠ \text{ عندما } س = ٠ , س = ٤ , س = ٢$$

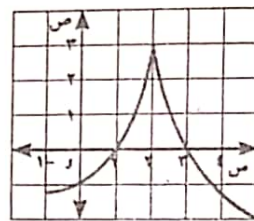
$$\therefore (٢ - س) = ٠ \therefore س = ٢$$

$$\therefore س = ٢$$



(٨, ٢) نقطة حرجة , (٨, ٢) نقطة انقلاب

$$[٥]$$



$$[٦] \text{ (٢) د}' (س) = \begin{cases} ٢ + ٤س , س \leq ١ \\ ٣ - ٢س , س > ١ \end{cases}$$

$$\therefore \text{ الدالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \therefore \text{ د}' (١) = \text{د}' (١)$$

$$\therefore ٢ - ٣ = ٣ - ٢ \therefore ٣ = ٣$$

$$س = ١ \therefore \text{ د}' (١) = \text{د}' (١) = ٣$$

$$\therefore (١) - (١) = ٣ - ٣ = ٠$$

$$\therefore ٣ - ٢ = ٣ - ٢ = ١ \therefore ٣ = ٣$$

$$[٧] \text{ (٢) د}' (س) = \begin{cases} ٤س , س \leq ١ \\ ٢ - س , س > ١ \end{cases}$$

$$\therefore \text{ لا توجد نقط انقلاب}$$

$$[٧] \text{ (س, ص) , (س, ص) , ص} \leq ٠$$

$$س + ص = ٥ \therefore ص = ٥ - س$$

$$ر = س^٣ - ٣س^٢ + ٥س - ٥$$

$$ر' = ٣س^٢ - ٦س + ٥$$

$$س = ١ \therefore ر' (١) = ٣ - ٦ + ٥ = ٢$$

الاختبار الثاني

السؤال الأول :

$$\forall \lambda \quad (1)$$

(٢) محدب لأسفل

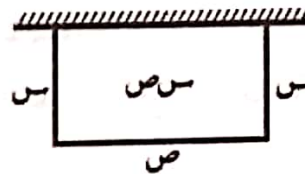
५ - (३)

$$] \cdot \infty - [\quad (4)$$

السؤال الثاني :

(۹) $۶۰ = ص + س$ $\therefore ۶۰ - ص = س$

م = س ص



س = (۶۰ - ۲ س)

$\therefore \text{م} = 60 \text{ س} - 2 \text{ س} = 58 \text{ س}$

∴ $\frac{25}{55} = 60 - 45 = 15$ عندما م تكون أكبر ما يمكن

ومنها س = ١٥ وعندئذ م = ٣٠ × ١٥ = ٤٥٠

(1) $\cdot = \delta$ $\therefore \cdot = (\cdot) \delta \therefore (\Psi)$

د (س) = ۳س + ۲ب س + ج س = ۲ نقطة حرجة

(۲) = ج + ب + ۱۲ = (۲)' د . ∴

∴ د (٤) صغرى محلیة

$$(3) \dots \cdot \equiv \alpha + \beta \lambda + \rho \epsilon \lambda = (\epsilon)'_d \therefore$$

١) ميل المماس $d' = 9$ ،

(٤) $9 = 7 + 2 + 3 \therefore$

من (٢)، (٣) بالطرح $\therefore 163 + 14 =$

$99 = 9 \therefore$

من (٤)، (٣) بالطرح $\therefore 9 = 6 + 145$

$$q = u \therefore 1 = p \therefore q = 902 - 920 \therefore$$

ومن (٤)

$$24 \equiv 7 \therefore 9 = 7 + 18 - 3 \therefore$$

الوحدة الرابعة:

التكامل المحدد وتطبيقاته

تمارين التكامل المحدد وتطبيقاته

المجموعة الأولى :

مسائل موضوعية على كامل الوحدة

[1] $\int_0^1 (1-x)^2 dx = (1) \quad \int_0^1 (1-x)^2 dx =$

$\frac{3}{2} = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] =$

[2] صفر

[3] $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx =$

$\times \frac{1 - (1-x)^2}{2} = \frac{1 - (1-x)^2}{2} = \frac{1 - (1-x)^2}{2} =$

[4] $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx =$

[5] $\int_0^1 (8x^2 + 4x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4x) dx =$

$= \frac{8}{3} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] =$

[6] $\int_0^1 [6x^2 - 24x + 30] dx = \int_0^1 [6x^2 - 24x + 30] dx = \int_0^1 [6x^2 - 24x + 30] dx =$

[7] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$12 - 3 + 10 = 12 - 3 + 10 = 12 - 3 + 10 =$

[8] $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx =$

$= \frac{6}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \left[\frac{1}{2} (1-x) \right] = \frac{2}{5} \left[\frac{1}{2} (1-x) \right] = \frac{2}{5} \left[\frac{1}{2} (1-x) \right] =$

[9] $\pi^3 = \pi^2 - \pi^0 = \pi^2 - \pi^0 = \pi^2 - \pi^0 =$

[10] $\frac{7}{3} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} =$

$2 = 1 - 3 = 1 - 3 = 1 - 3 =$

[11] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

[12] $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx =$

[13] $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx =$

[14] $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} =$

[15] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) =$

[16] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$1 = 1 - 0 = 1 - 0 = 1 - 0 =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

[17] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

[18] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

[19] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

[20] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$10 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) =$

[21] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

[22] $\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$\int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \int_0^1 (1-x) dx =$

$$\left[\frac{1}{2} (1 - s^2) \right]_{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} [s^2 - 1] + \frac{1}{2} [1 - s^2] =$$

$$\frac{1}{2} = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - (1 - 1) \right]$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{[31]} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{2}{3} (1 + s) = \frac{2}{3} (1 + s) \quad \text{[32]} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\left[\frac{1}{2} (1 + s^2) \right]_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1 + s^2) \quad \text{[33]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} (1 - s^2) \right]_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1 - s^2) \quad \text{[34]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[35]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[36]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[37]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[38]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[39]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[40]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[41]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\pi = \pi \quad \text{[42]} \quad \pi = \pi$$

$$\pi = \pi \quad \text{[43]} \quad \pi = \pi$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[44]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[45]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[46]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[47]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[48]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[49]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[50]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[51]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[52]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{[53]} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

٤١] ص. و. س =

٤٢] ١٦ = ١٢ - ٢٨ = ٤[٢س - ٣س] =

٨ = ٢ < ١٦ = ٢٢

٤٣] ٣ - = ٨ - ٥ = (٦) - (٢) = ٤[٢(س) - ٣(س)] =

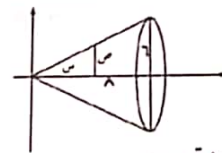
٤٤] بفرض ع = د (س) : ع = د' (س) . و. س

التكامل = ٣ : ٤[٢س - ٣س] = ٤[٢س - ٣س] = ٤[٢س - ٣س] =

٤[٢س - ٣س] = ٤[٢س - ٣س] = ٤[٢س - ٣س] =

٥٢ = (١ - ٢٧) ٢ = (١٢ - ٩٢) ٢ =

٤٥] من تشابه المثلثين فإن



ص = ٨ : ٦ = ٤ : ٣

ح = ٩٦ : ١٦ = ٩ : ١

٤٦] ٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

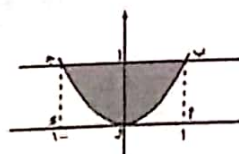
٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٤٧] ٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٤٨] ٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =



٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٣ = ح : ١[٢س + ٣س] =

٤٩] مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات

٥٠] نقط التقاطع : س = ٠ ، أ = ١

٢ = ١[٢س + ٣س] =

١[٢س + ٣س] =

٢ = ١[٢س + ٣س] =

المجموعة الثانية :

مسائل على طرق التكامل

١١] ٣ = ١[٢س + ٣س] =

٣ = ١[٢س + ٣س] =

١٢] ٥ = ١[٢س + ٣س] =

٥ = ١[٢س + ٣س] =

١٣] بوضع ع = ٣س + ٥ : ع = ٦س + ٥

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١٤] نفرض ص = ٤س - ٥ : ص = ٤س - ٥

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١٥] بفرض ص = ٣س + ١ : ص = ٣س + ١

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١٦] نفرض ص = ٣س - ١ : ص = ٣س - ١

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

١ = ح : ١[٢س + ٣س] =

$$\begin{aligned} \therefore [و.ع = ع.و] - [ع.و = و.ع] &= [و.ع - ع.و] \\ \frac{1}{6} \times (5 - 2) = و.ع - ع.و &= و.ع - ع.و \\ \frac{1}{6} \times (5 - 2) = و.ع - ع.و &= و.ع - ع.و \\ \frac{1}{6} \times (5 - 2) = و.ع - ع.و &= و.ع - ع.و \end{aligned}$$

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - (1 + 2) = ع.و$$

$$\frac{1}{3} - (1 + 2) = ع.و$$

$$\therefore \frac{2}{3} (1 + 2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} (1 + 2) \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = ع.و$$

$$\therefore \text{المقدار} = و.ع \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} (1 + 2) - \frac{2}{3} (1 + 2)$$

$$\left[\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} (1 + 2) \right]$$

$$= \frac{9}{2} (1 + 2) - \frac{2}{3} (1 + 2) = و.ع$$

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\frac{2}{3} (3 + 2) = ع.و \Rightarrow \frac{1}{3} (3 + 2) = و.ع$$

$$\text{المقدار} = و.ع \times \frac{2}{3} (3 + 2) - \frac{2}{3} (3 + 2)$$

$$= و.ع \times \frac{2}{3} (3 + 2) - \frac{2}{3} (3 + 2)$$

$$= و.ع \times \frac{2}{3} (3 + 2) - \frac{2}{3} (3 + 2)$$

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\text{المقدار} = [و.ع \times (3 - و.ع)] - [و.ع \times (3 - و.ع)]$$

$$= و.ع \times (3 - و.ع) - و.ع \times (3 - و.ع)$$

$$= و.ع \times (3 - و.ع) - و.ع \times (3 - و.ع)$$

$$= و.ع \times (3 - و.ع)$$

ملحوظة: قيمتي الجوابان متساويتان مهما تغيرت قيمة س.

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\therefore \frac{و.ع}{و.ع} = \frac{و.ع}{و.ع} \therefore \text{المقدار} = [و.ع \times \frac{و.ع}{و.ع}]$$

$$= \frac{1}{و.ع} \times و.ع = و.ع = \frac{1}{و.ع} (1 + و.ع) + و.ع$$

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\therefore و.ع = (3 - و.ع) \times و.ع \therefore و.ع = (3 - و.ع) \times و.ع$$

$$\therefore \text{المقدار} = [و.ع \times (3 - و.ع)] - [و.ع \times (3 - و.ع)]$$

$$= و.ع - و.ع = و.ع - و.ع = و.ع - و.ع$$

حل آخر:

$$\text{المقدار} = [و.ع \times (3 - و.ع)] - [و.ع \times (3 - و.ع)]$$

$$= و.ع - و.ع = و.ع - و.ع = و.ع - و.ع$$

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\therefore \frac{و.ع}{و.ع} = \frac{و.ع}{و.ع} \therefore \text{المقدار} = [و.ع \times \frac{و.ع}{و.ع}]$$

$$= \frac{2}{و.ع} \times و.ع = و.ع = \frac{2}{و.ع} (1 + و.ع) + و.ع$$

$$= [و.ع \times (3 - و.ع)] - [و.ع \times (3 - و.ع)]$$

$$= و.ع - و.ع = و.ع - و.ع = و.ع - و.ع$$

$$= \frac{1}{1 + و.ع} (1 + و.ع) + و.ع$$

الدالة الأولى مشتقة للدالة الثانية فنطبق القاعدة

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 = و.ع \times \frac{1}{3} \times 3 = و.ع \times \frac{1}{3} \times 3$$

$$= و.ع \times \frac{1}{3} \times 3 = و.ع \times \frac{1}{3} \times 3 = و.ع \times \frac{1}{3} \times 3$$

$$= [و.ع \times (3 - و.ع)] - [و.ع \times (3 - و.ع)]$$

نقضي $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$ \Rightarrow $و.ع = ع.و$

$$\therefore و.ع = (3 - و.ع) \times و.ع \therefore و.ع = (3 - و.ع) \times و.ع$$

$$\text{ص} \frac{2}{5} \text{ص} \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{ص} \frac{2}{5} = \text{ث} + \frac{2}{3} \text{ص} \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \text{ص} \frac{2}{3} = \text{ث} + \frac{2}{3} \text{ص} \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \text{ص} \frac{2}{3}$$

$$\text{[٢٠]} \quad \text{نفرض س} = 1 - \text{ع} \therefore \text{ع} = 1 - \text{س} \quad \text{س} = 1 + \text{ع}$$

$$\text{ع} = \text{س} = 2 \text{ع} \text{ع}$$

$$\text{المقدار} = [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$+ 140$$

$$\text{[٢١]} \quad \text{نفرض س} = 1 - \text{ع} \therefore \text{ع} = 1 - \text{س} \quad \text{س} = 1 + \text{ع}$$

$$\text{س} = (1 - \text{ع}) \therefore \text{ع} = 1 - \text{س} \quad \text{س} = 1 + \text{ع}$$

$$\text{المقدار} = [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$\text{[٢٢]} \quad \text{نفرض س} = 1 + \text{ع} \therefore \text{ع} = \text{س} - 1 \quad \text{س} = 1 - \text{ع}$$

$$\text{س} = (1 + \text{ع}) \therefore \text{ع} = \text{س} - 1 \quad \text{س} = 1 - \text{ع}$$

$$\text{المقدار} = [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$\text{[١٧]} \quad \text{أولاً} \quad \text{نفرض س} = \text{ع} \therefore \text{ع} = \text{س} \quad \text{س} = \text{ع}$$

$$\text{ع} = (1 + \text{س}) \therefore \text{ع} = \frac{1}{1 + \text{س}} \quad \text{س} = \frac{1}{1 + \text{ع}}$$

$$\text{المقدار} = [\text{س} (1 + \text{س}) + 3 + \text{س} \times \text{س} \times \text{س}]$$

$$= [\text{س} (1 + \text{س}) + 3 + \text{س} \times \text{س} \times \text{س}]$$

$$\text{ثانياً} \quad \text{نفرض س} = 1 + \text{ع} \therefore \text{ع} = \text{س} - 1 \quad \text{س} = 1 - \text{ع}$$

$$\text{س} = \text{ع}$$

$$\text{المقدار} = [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$\text{[١٨]} \quad \text{أولاً} \quad \text{نفرض س} = \text{ع} \therefore \text{ع} = \text{س} \quad \text{س} = \text{ع}$$

$$\text{ع} = (1 - \text{س}) \therefore \text{ع} = \frac{1}{1 - \text{س}} \quad \text{س} = \frac{1}{1 - \text{ع}}$$

$$\text{المقدار} = [\text{س} (1 - \text{س}) + 3 + \text{س} \times \text{س} \times \text{س}]$$

$$= [\text{س} (1 - \text{س}) + 3 + \text{س} \times \text{س} \times \text{س}]$$

$$= [\text{س} (1 - \text{س}) + 3 + \text{س} \times \text{س} \times \text{س}]$$

$$\text{ثانياً} \quad \text{نفرض س} = 1 - \text{ع} \therefore \text{ع} = 1 - \text{س} \quad \text{س} = 1 + \text{ع}$$

$$\text{س} = \text{ع}$$

$$\text{المقدار} = [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 - \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$\text{[١٩]} \quad \text{نفرض س} = 1 + \text{ع} \therefore \text{ع} = \text{س} - 1 \quad \text{س} = 1 - \text{ع}$$

$$\text{س} = (1 - \text{ع}) \therefore \text{ع} = \frac{1}{1 - \text{س}} \quad \text{س} = \frac{1}{1 - \text{ع}}$$

$$\text{س} = \text{ع}$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

$$= [\text{ع} (1 + \text{ع}) + 3 + \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}]$$

٢٩١] نفرض $ه = س$ $و = ه = س$

و ع = ه س = ع ه س

المقدار = س ه س - [ه س = س ه س - ه س + ث

٢٩٠] نفرض $ه = لو ه س$ $و = ه = س$ $و = س$

و ع = و س = ع س

المقدار = س لو ه س - [س \times س = س

= س لو ه س - [و س = س لو ه س - س + ث

٢٩١] نفرض $ه = لو ه س$ $و = ه = س$ $و = س$

و ع = س = س = ع $\frac{س}{٣}$

المقدار = $\frac{س}{٣}$ لو ه س - [$\frac{س}{٣} \times \frac{س}{٣}$ = و س = $\frac{س}{٣}$ لو ه

س - [$\frac{س}{٣}$ = و س = $\frac{س}{٣}$ لو ه س - $\frac{س}{٣} \times \frac{س}{٣}$ + ث

= $\frac{س}{٣}$ لو ه س - $\frac{س}{٩}$ + ث

٢٩٢] نفرض $ه = س$ $و = ه = س$ $و = س$

و ع = س = س جتا (س) = و س

ع = $\frac{١}{٤}$ جتا (س) \therefore المقدار = $\frac{١}{٤}$ س جتا (س) = $\frac{١}{٤}$ س جتا (س)

+ $\frac{١}{٤}$ س جتا (س) = و س = $\frac{١}{٤}$ س جتا (س)

+ $\frac{١}{٨}$ س جتا (س) = و س

= $\frac{١}{٤}$ س جتا (س) + $\frac{١}{٨}$ س جتا (س) + ث

٢٩٣] نفرض $ه = س$ $و = ه = س$ $و = س$

و ع = س = س ه س = و س = ع $\frac{١}{٣}$ ه س

المقدار = $\frac{١}{٣}$ س ه س - [س ه س = و س

= $\frac{١}{٣}$ س ه س - $\frac{١}{٣}$ ه س + ث

٢٩٤] نفرض $ه = س$ $و = ه = س$ $و = س$

و ع = س جتا (س) = و س

ع = $\frac{١}{١٠}$ س جتا (س) \therefore المقدار = $\frac{١}{١٠}$ س جتا (س)

- [$\frac{١}{١٠}$ س جتا (س) = و س

= $\frac{١}{١٠}$ س جتا (س) + $\frac{١}{١٠}$ جتا (س) + ث

المجموعة الثالثة :

مسائل على تكامل الدوال المثلثية ومقلوباتها

المسائل من (١) إلى (٩) تطبيق مباشر على قواعد التكامل

١٠] $\frac{١}{٢} =$ [(١ - جتا ٢ س) = و س

= $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) + ث

١١] $\frac{١}{٢} =$ [(١ + جتا ١٠ س) = و س

= $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{١}{١٠}$ جتا ١٠ س) + ث

١٢] $\frac{١}{٣} =$ [(١ - س ٣ س) = و س

= $\frac{١}{٣}$ ظا ٣ س - س + ث

١٣] $\frac{١}{٤} =$ [(١ - س ٤ س) = و س

= $\frac{١}{٤}$ ظتا ٤ س - س + ث

١٤] $\frac{١}{٤} =$ [(جتا ٢ س) \times ٣ جتا ٢ س = و س

= $\frac{١}{٤}$ - [(جتا ٢ س) \times ٣ (٢ - جتا ٢ س) = و س

= $\frac{١}{٤}$ - [(جتا ٢ س) \times ٤ = و س + ث

١٥] $\frac{١}{٣} =$ [(جتا ٣ س) \times ٤ (جتا ٣ س) = و س

= $\frac{١}{٣}$ \times $\frac{١}{٥}$ جتا ٣ س + ث = $\frac{١}{١٥}$ جتا ٣ س + ث

المسائل من (١٦) إلى (٢١) مباشرة على قواعد التكامل

٢٢] $\frac{١}{٢} =$ [(١ + جتا ٢ (س - ٢)) = و س

= $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢ (س - ٢)) = و س

المجموعة الرابعة :

مسائل على التكامل المحدود

$$[1] \quad [س^3 - 2س^2 + 5س] = (س^3 - 2س^2 + 5س) - (س^3 - 2س^2 + 5س) = 10$$

$$[2] \quad [س^3 - 2س^2 + 5س] = (س^3 - 2س^2 + 5س) - (س^3 - 2س^2 + 5س) = \frac{7}{6} - (0) = \frac{7}{6}$$

$$[3] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 64$$

$$[4] \quad [س^2 - 7س + 12] = (س^2 - 7س + 12) - (س^2 - 7س + 12) = 128$$

$$[5] \quad [س^3 - 3س^2 + 5س - 2] = (س^3 - 3س^2 + 5س - 2) - (س^3 - 3س^2 + 5س - 2) = 16$$

$$[6] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = \frac{35}{2}$$

$$[7] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 13,5$$

$$[8] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6} = (س - \frac{1}{6}) - (س - \frac{1}{6}) + ث$$

$$\frac{1}{6} = (س - \frac{1}{6}) - (س - \frac{1}{6}) + ث$$

$$[23] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$\frac{1}{6} = (س - \frac{1}{6}) - (س - \frac{1}{6}) + ث$$

$$[24] \quad \text{الدالة } \times \text{ مشتقتها} \therefore \text{المقدار} = \frac{1}{6} \text{ ظا } س + ث$$

$$[25] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[26] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[27] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[28] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[29] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[30] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[31] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[32] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[33] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[34] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[35] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$[36] \quad [س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س] = (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) - (س^4 - 4س^3 + 3س^2 + 2س) = 10$$

$$\begin{aligned} \text{[15]} \quad & \left[\frac{1}{2} (10s - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s - 2) \right] = \\ & \text{س} = \left[\frac{1}{2} (10s - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s - 2) \right] = \\ & 241 = (2 - 0 + 2 - 6) - (8 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[16]} \quad & \left[\frac{3}{2} (4s + 12s - 9s) \right] = \\ & \left[\frac{3}{2} (4s + 12s - 9s) \right] = \\ & 22 = (8 - 24 - 6) - (4 - 48 - 48) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[17]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s + 2s + 3s) \right] = \\ & 1 - 256 = \frac{1}{2} (3s + 2s + 3s) = \frac{1}{2} \times 8 = \\ & 250 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[18]} \quad & \left[\frac{1}{3} (3s - 2s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{3} (3s - 2s) \right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \\ & \frac{5}{64} = \left(\frac{1}{16} - 1 \right) \frac{1}{12} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[19]} \quad & \left[\frac{1}{3} (3s + 2s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{3} (3s + 2s) \right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \\ & \frac{112}{9} = (8 - 74) \frac{1}{9} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[20]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s - 4s) \right] = \\ & 2 = (2 - 1)2 = 2 \left[\frac{1}{2} (3s - 4s) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[21]} \quad & \left[\frac{1}{2} (7s - 4s) \right] = \\ & \frac{64}{30} = (32 - 0) \frac{1}{30} = \frac{1}{30} \left[\frac{1}{2} (7s - 4s) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[9]} \quad & \left[\frac{1}{2} (8s + 8s - 12s + 6s - 3s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{2} (8s + 8s - 12s + 6s - 3s) \right] = \\ & \frac{16}{3} = (12 + 3 - 24 + 12 - 6) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[10]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & \frac{17}{2} = (0 + 10 + 0 - 1) - \left(\frac{0}{2} + 30 + 40 - 32 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[11]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & 32 = (3 - 6 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}) - (1 - 18 - \frac{9}{2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[12]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & 10 = (6 - 16) - (0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[13]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & 76 = (4) - (16 + 74) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[14]} \quad & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & \left[\frac{1}{2} (3s + 3s - 1s - 3s) \right] = \\ & 96 = (3 + 3) - (6 + 96) = \end{aligned}$$

$$[29] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\times \left[(س + 2 + 3) - (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{5}{144} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[30] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{5}{8} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[31] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$63 = \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} \times 6 =$$

$$[32] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$114 = \left(1 - \frac{1}{2} \times 2 \right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[33] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$9 = \left(33 - \text{صفر} \right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[34] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$98 = 33 - 35 = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$[35] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$3 = 1 \times 3 = (1 - 1) \cdot 3 =$$

$$[36] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$1 = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[29] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\text{صفر} = \left(1 - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[32] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\text{صفر} = \left(1 - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[34] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left(729 - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$364 = \left(728 - 1 \right) \times \frac{1}{2} =$$

$$[35] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left(65 - 125 \right) \cdot \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[36] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{32}{5} = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$[37] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$36 = \left(1 + 1 + 2 - 1 \right) - \left(1 + 9 + 54 - 81 \right) =$$

$$[38] \quad \left[(س + 2) - (س + 2 + 3) \right] \cdot \frac{1}{2} =$$

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (س + 2) \right] \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+s^2) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$4 = (1 - \frac{1}{2}) \cdot 4 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 \times 2 =$$

$$\left[\frac{2-(3+s^2)}{(3+s^2)} \right]_{-1}^1 = \frac{2-(3+1)}{(3+1)} - \frac{2-(3+1)}{(3+1)} = 0$$

$$\frac{2}{(3+s^2)} \Big|_{-1}^1 - \frac{2}{(3+s^2)} \Big|_{-1}^1 =$$

$$- \frac{1}{2} (2) = -1$$

$$\left[\frac{2}{(3+s^2)} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{(3+1)} - \frac{2}{(3+1)} = 0$$

$$\times \frac{1}{3} \left[\frac{2}{(3+s^2)} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{(3+1)} - \frac{2}{(3+1)} \right] = 0$$

$$\frac{7}{81} = (1 - \frac{1}{81}) \cdot \frac{1}{4} + (1 - \frac{1}{81}) \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\left[\frac{4-(4+s)}{(4+s)} \right]_{-1}^1 = \frac{4-(4+1)}{(4+1)} - \frac{4-(4+1)}{(4+1)} = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} (4+s) \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{2} (4+s) \right]_{-1}^1 =$$

$$\frac{14}{3} = \left[\frac{1}{2} (4+s) \right]_{-1}^1 \times 4 - \left[\frac{1}{2} (4+s) \right]_{-1}^1 \times 2 =$$

$$\left[\frac{24+(10+3s^2)}{(10+s^2)} \right]_{-1}^1 = \frac{24+(10+3)}{(10+1)} - \frac{24+(10+3)}{(10+1)} = 0$$

$$\left[\frac{2}{(10+s^2)} + \frac{3}{(10+s^2)} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{(10+1)} + \frac{3}{(10+1)} - \frac{2}{(10+1)} - \frac{3}{(10+1)} = 0$$

$$\frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} (10+s^2) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (10+1) - \frac{1}{2} (10+1) = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} (10+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (10+1) - \frac{1}{2} (10+1) = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} (10+s^2) \right]_{-1}^1 \times 2 + \left[\frac{3}{2} (10+s^2) \right]_{-1}^1 \times \frac{3}{2} =$$

$$9 - 39 = (10 - 9) \cdot 4 + 0 \cdot 2 - 9 \cdot 2 =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$9 = (1 - \frac{1}{2}) \cdot 9 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 \times 2 =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} (1+s^2) \right]_{-1}^1 =$$

$$3 \cdot 2 - 18 =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 \times \frac{1}{2} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 =$$

$$(3 - 13) \cdot \frac{2}{3} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$- \frac{1}{2} (1+s^2) \Big|_{-1}^1 = - \frac{1}{2} (1+1) + \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{9} \left(\frac{9}{4} \right) \right]_{-1}^1 = \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right]_{-1}^1 =$$

$$\frac{27}{12} = (8 - \frac{27}{8}) \cdot \frac{2}{3} =$$

$$\left[\frac{1}{2} (1+s^2) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1+1) - \frac{1}{2} (1+1) = 0$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} (1+s^2) \right]_{-1}^1 \times 2 =$$

$$(2 - 4) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$[52] \quad \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$(s) \cdot \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$18 \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{50}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} =$$

$$[53] \quad \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$(13 - 20) + (0 - 10) + (0) - (2) = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$14 =$$

$$[54] \quad \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$s = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$+ \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + 3s) \right]_1^2$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{2} \right) + \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{2} \right) - \frac{9}{2} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{30}{2} \right) + \text{صفر} \right]$$

$$[55] \quad \left[\frac{10}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{10}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{10}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{10}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{10}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{10}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2$$

$$\frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p \quad \therefore \frac{10}{2} = \left[\frac{1}{2} (1 + s - s^2) \right]_1^2$$

$$\therefore \frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p \quad \therefore \frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p \quad \therefore \frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p$$

$$\therefore \frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p \quad \therefore \frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p \quad \therefore \frac{10}{2} = p + \frac{1}{2} p$$

$$[56] \quad \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 4 = 12 \quad \therefore \text{ث} = \text{صفر}$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\frac{32}{3} = \frac{11}{3} - \frac{42}{3} = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$[57] \quad \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$36 = 1 - 27 + 6 + 4 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$[58] \quad \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$8 \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + 4 + \frac{9}{2} = \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) - (12 - 16) + \text{صفر}$$

$$[59] \quad \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$24 = 0 - (10 + 8) + (10 - 4) = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$[60] \quad \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$\left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} (2s - s^2) \right]_1^2$$

$$(18 - 9) - (0 - \frac{125}{3}) + \frac{29}{2} + (\frac{40}{2} - 36) =$$

$$28 = 9 + \frac{20}{3} - \frac{29}{2} + \frac{29}{2}$$

[٦١] ت (س) دالة كثيرة حدود فهي متصلة

$$ت' (س) = \frac{3}{2} (س^3 - ٢س - ٥) + \frac{1}{2} (٥ - ٦س) =$$

د (س) = (س) مشتقة عكسية للدالة د (س)

$$\left[\frac{3}{2} (س^3 - ٢س - ٥) + \frac{1}{2} (٥ - ٦س) \right] = د (س) \cdot س =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = ١ \quad \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = ١ \quad ٣١٦ = ٢٧ - ٣٤٣ = ٩ \frac{2}{2} - ٤٩ \frac{2}{2} =$$

[٦٢] ت (س) = خارج قسمة كثيرتي حدود

٣ - س - ٤ في [٥, ٢] ت (س) متصلة عندئذ

$$ت' (س) = \frac{٣ \times (٥ - س٢) - ٢ \times (٤ - س٣)}{(٤ - س٣)^2} =$$

د (س) = \frac{٧}{٢(٤ - س٣)} ت (س) هي مشتقة عكسية

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{٥ - س٢}{٤ - س٣} \right] = د (س) \cdot س =$$

$$\frac{21}{22}$$

[٦٣] ت (س) متصلة في [٣, ١]

$$ت' (س) = \left(\frac{س}{س+1} \right) \times \frac{1 \times س - 1 \times (س+1)}{٢(س+1)} =$$

د (س) = \frac{س٢}{٣(س+1)} ت (س) هي مشتقة عكسية

$$\left[\frac{س}{س+1} \right] = د (س) \cdot س =$$

$$\frac{5}{16} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} =$$

[٦٤] ت (س) دالة متصلة في [٣, ١]

$$ت' (س) = \frac{1}{2} (٥ + س٤ - س٢) + \frac{1}{2} (٢ - ٤س) =$$

د (س) = \frac{(س-٢)}{٢س-٤س+٥} ت (س) هي مشتقة

عكسية للدالة د (س) د (س) \cdot س =

$$\frac{2}{1} \left[\sqrt{٢س-٤س+٥} \right] = ٨\sqrt{2} - ٨\sqrt{2} = \text{صفر}$$

$$[٥٦] \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = د (س) \cdot س = ٢$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = د (س) \cdot س =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{١ + س٢} = ٣ \quad \frac{1}{2} \sqrt{١ + س٢} = ٣ \quad ١ + س٢ = ٣$$

$$٨ = ٢٢ \quad ٩ =$$

$$\frac{2}{2} = ٢ \quad ٢ = ٢$$

$$[٥٧] \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (١ - س) \right] = د (س) \cdot س = ٠ > ٢$$

$$\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} (١ - س) \right] = \text{صفر} \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$\frac{2}{2} = ٢ \quad ٨ = ٢٢$$

$$[٥٨] \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = د (س) \cdot س = \frac{31}{5}$$

$$\frac{31}{5} = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = \frac{31}{5} \quad \frac{31}{5} = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] =$$

$$\frac{31}{5} = \sqrt{١ + س٢} \quad \frac{31}{5} = \sqrt{١ + س٢} \quad ٣٢ = \sqrt{١ + س٢}$$

$$\frac{31}{5} = \sqrt{١ + س٢} \quad ١٠٢٤ = \sqrt{١ + س٢} \quad ١٠٢٤ = \sqrt{١ + س٢}$$

$$[٥٩] \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = د (س) \cdot س = ٣ \times ٢ =$$

$$١ = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = ٦ \quad ١ = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] =$$

$$١ = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] = ٦ \quad ١ = \left[\frac{1}{2} (١ + س٢) \right] =$$

$$\frac{2}{2} = ٢ \quad ٢ = ٢$$

$$[٦٠] ت (س) = (س٤ - ٢س + ١) (٢ - س) =$$

٤ - س٣ - ١٢س + ٩س - ٢ وهي كثيرة حدود فهي

متصلة ، ت' (س) = ١٢س - ٢س٤ - ٩س + ٢

ت' (س) = د (س)

ت (س) مشتقة عكسية للدالة د (س) د (س) \cdot س =

$$\frac{2}{1} \left[\frac{1}{2} (١ - س) \right] = د (س) \cdot س =$$

$$\frac{2}{2} = ٢ + ٢٥ =$$

$$\frac{1}{3} \therefore 63 = 9 - 2(2+1) \therefore 216 = 2(2+1)$$

$$\therefore 6 = 2+1 \therefore 4 = 2$$

$$\text{[٦٩]} \quad \text{ف} = \left[2(2+1+2) \right] = 25$$

$$180 = 16 - 196 = \left[2(2+1+2) \right] = 25$$

$$\text{ثانياً} \quad \text{ف} = \left[2(2+1+2) \right] = 25$$

$$124 = 196 - 320 = \left[2(2+1+2) \right] = 25$$

$$\text{[٧٠]} \quad \text{البعد بعد ثانيتين} = \left[2(2+1) \right] = 25$$

$$= \left[2(2+1) \right] = 25 \quad \text{سم} \quad 10 = 0 - 10 = 10$$

$$= \left[2(2+1) \right] + \left[2(2+1) \right] = 25$$

$$= 10 = \left[2(2+1) \right] + 10 = 14 - 0 + 10 = 24 \text{ سم}$$

$$\text{[٧١]} \quad \text{ف} = \left[2(2+1) \right] = 25$$

$$= \left[2(2+1) \right] = 25 \quad \text{متر} \quad 18 = (30) - (48) = 25$$

$$= \left[2(2+1) \right] + \left[2(2+1) \right] = 25$$

$$= \left[2(2+1) \right] + 18 = 25 \quad \text{متر} \quad 100 = 3 - 80 + 18 = 25$$

$$\text{[٧٢]} \quad \text{أولاً} \quad \text{البعد بعد ٢ ث} = \left[2(2+1) \right] = 25$$

$$= \left[2(2+1) \right] = 25 \quad \text{متر} \quad 4 = 0 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 25$$

$$\text{ثانياً} \quad \text{البعد بعد ٥ ث} = \left[2(2+1) \right] = 25$$

$$= \left[2(2+1) \right] + 4 = 25 \quad \text{متر} \quad 10 = \left(\frac{4}{3} - 12 \right) - \left(\frac{20}{3} - 30 \right) + 4 = 25$$

$$\text{ثالثاً} \quad \text{ع} = \left(\frac{4}{3} + 2 \right) = 25 \text{ متر/ث}$$

$$\text{[٦٥]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٥]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٥]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٥]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٥]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$26 =$$

$$\text{[٦٦]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٦]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٦]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٦]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٦]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٦]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٧]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٧]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٧]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٧]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٧]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٨]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٨]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٨]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$\text{[٦٨]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

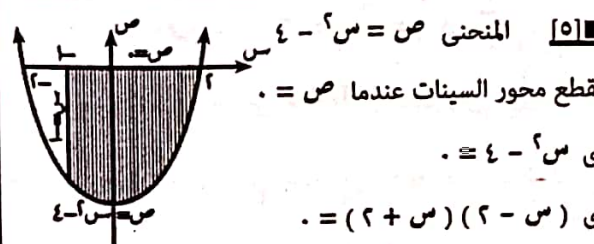
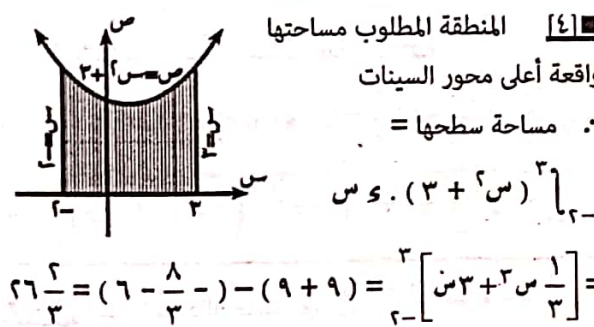
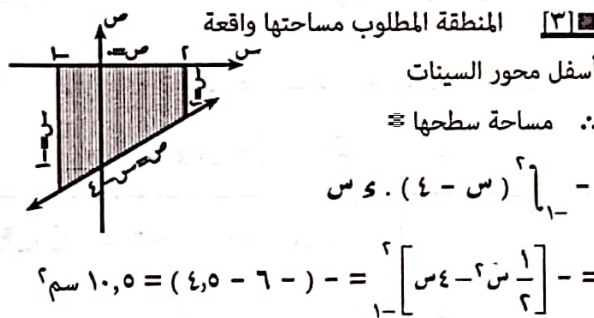
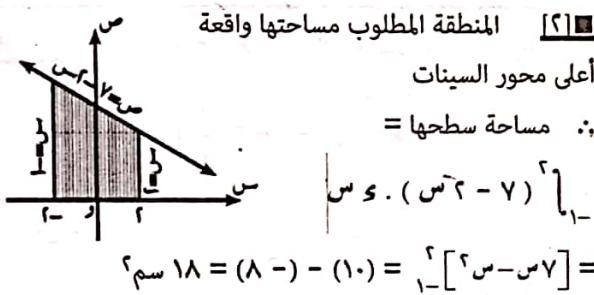
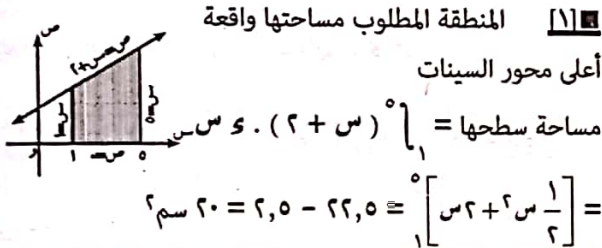
$$\text{[٦٨]} \quad \text{ت} (س) = (١ + س) \quad \text{دالة متصلة في} \quad \frac{3}{4}$$

$$2145,5 = (27 + 27 + \frac{81}{2}) - (48 + 64 + 128) =$$

المجموعة الخامسة :

مسائل على المساحات

أولاً : مساحة سطح مناطق بين منحنى ومحور السينات



$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } x \geq 0 \quad (22-0)-8 \\ \text{عندما } x < 0 \quad (0-22)-8 \end{array} \right\} = 8 \quad [73]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } x \geq 0 \quad 22+3 \\ \text{عندما } x < 0 \quad 22-13 \end{array} \right\} =$$

∴ الإزاحة خلال الأربعة ثوان الأولى =

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \cdot (22-13) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (22+3) \cdot 2 \right] \\ & + \left[\frac{1}{2} \cdot (22-13) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (22+3) \cdot 2 \right] \\ & + \left(\frac{20}{4} \cdot \frac{60}{2} - 36 + 0 - \left(\frac{20}{4} \cdot \frac{10}{2} \right) \right) = \\ & 23,5 = \frac{100}{4} - 36 + \frac{0}{4} \end{aligned}$$

، الإزاحة خلال الثانية الثالثة فقط = $\int_2^3 x^2 dx = 8 \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \cdot (22-13) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (22+3) \cdot 2 \right] \\ & + \left[\frac{1}{2} \cdot (22-13) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (22+3) \cdot 2 \right] \\ & = \left(\frac{20}{4} - \frac{60}{2} \right) - (30) + 10 - \left(\frac{20}{4} + \frac{10}{2} \right) = 7,5 \text{ سم} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_1^3 = 20 \quad [74]$$

$$\begin{aligned} & \left(2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} \right) - \text{صفر} \\ & \therefore 2 + 2 + 3 = 7 \end{aligned}$$

∴ الإزاحة خلال الثانية الثانية والثالثة = $\int_1^3 x^2 dx = 8 \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_1^3 = \\ & 90 = \left(3 + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left(27 + 27 + \frac{81}{2} \right) = \end{aligned}$$

، الإزاحة خلال الثانية الرابعة فقط = $\int_3^4 x^2 dx = 8 \frac{1}{3}$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_3^4 =$$

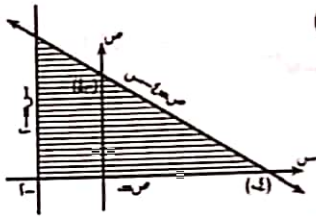
٩] بوضع $y = 0$ في معادلة المستقيم

نجد أن $x = 4$ ثم نرسم المستقيم المار

بالنقطتين $(4, 0)$ ، $(0, 4)$

وكذلك المستقيم $y = 2$

فنجد أن المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أعلى محور السينات



∴ مساحة سطحها = $\int_0^4 (4 - x - 2) dx$

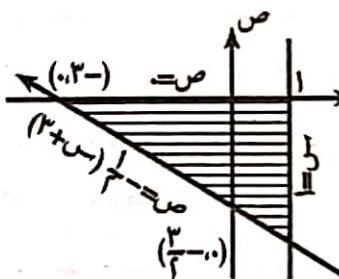
$$= \left[2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = (8 - 8) - (0 - 0) = 0 \text{ سم}^2$$

١٠] بوضع $y = 0$ في معادلة المستقيم

نجد أن $x = 3$

وبوضع $x = 0$ نجد أن

$y = \frac{3}{2}$ ثم نرسم



المستقيم المار بالنقطتين $(\frac{3}{2}, 0)$ ، $(0, \frac{3}{2})$ وكذلك

المستقيم $y = 1$ فنجد أن المنطقة المطلوب مساحة سطحها

تقع أسفل محور السينات ومساحة سطحها =

$$= \int_0^3 \left(\frac{3}{2} - x - 1 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2} \right) - (0 - 0) = -3 \text{ سم}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{9}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \right) \right] = 3 \text{ سم}^2$$

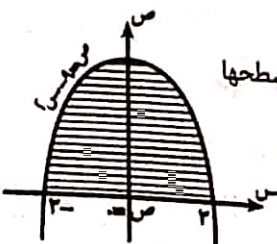
١١] المنطقة المطلوب مساحة سطحها

تقع أعلى محور السينات بين المنحنى

$y = 9 - x^2$ ومحور السينات،

وعندما $y = 0$ نجد أن

$x = 3$ ، ∴ مساحة سطحها



$$= \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = \left(27 - 9 \right) - \left(-27 + 9 \right) = 36 \text{ سم}^2$$

$$= \frac{2}{3} \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 36 \text{ سم}^2$$

١٢] $y = 2$ لأن $x = 2$ ∴ المنطقة المطلوب مساحة

سطحها تقع أسفل محور السينات

∴ مساحة سطحها =

$$= \int_0^2 (2 - x) dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = (4 - 2) - (0 - 0) = 2 \text{ سم}^2$$

$$= \left(\frac{11}{3} - \frac{17}{3} \right) - (0 - 0) = -2 \text{ سم}^2$$

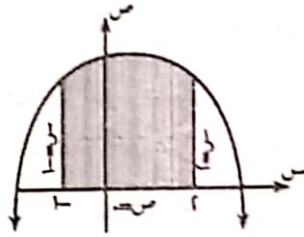
١٣] المنطقة المطلوب مساحة سطحها واقعة أعلى محور السينات

∴ مساحة سطحها

$$= \int_0^5 (5 - x) dx = \left[5x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^5 = \left(25 - \frac{25}{2} \right) - (0 - 0) = \frac{25}{2} \text{ سم}^2$$

$$= \left[5x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^5 = \left(25 - \frac{25}{2} \right) - (0 - 0) = \frac{25}{2} \text{ سم}^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 5 \right) - \left(\frac{8}{3} - 10 \right) = \frac{14}{3} \text{ سم}^2$$



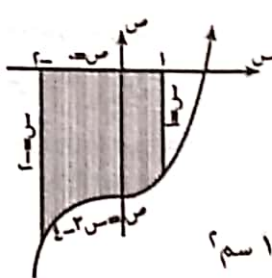
١٤] المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل محور السينات

∴ مساحة سطحها = $\int_0^4 (4 - x^2) dx$

$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \left(16 - \frac{64}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{16}{3} \text{ سم}^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 8 \right) - \left(\frac{1}{4} - 10 \right) = \frac{15}{4} \text{ سم}^2$$

$$= \left(\frac{15}{4} - 12 \right) - (0 - 0) = -\frac{33}{4} \text{ سم}^2$$



١٥] بوضع $y = 0$ في معادلة

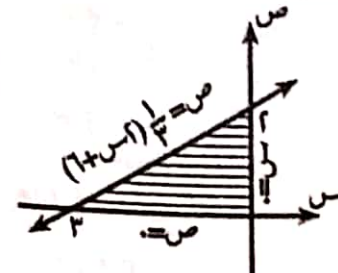
المستقيم نجد أن: $x = 2$

وبوضع $x = 0$ نجد أن

$y = 3$ ثم

نرسم المستقيم

المار بالنقطتين $(2, 0)$ ، $(0, 3)$



فنجد أن المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أعلى محور

السينات ومساحة سطحها =

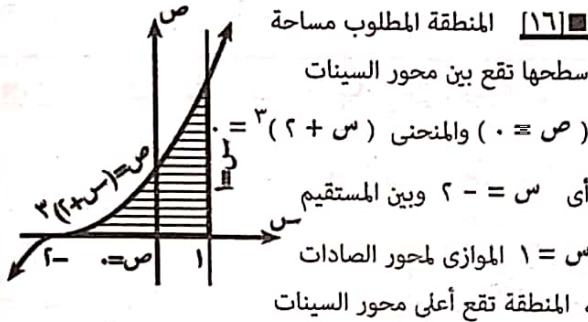
$$= \int_0^2 (3 - x) dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = \left(6 - 2 \right) - (0 - 0) = 4 \text{ سم}^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[6x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^3 = \left(18 - 9 \right) - \left(-9 + 9 \right) = 9 \text{ سم}^2$$

∴ مساحة سطحها = $\int_{-2}^3 (27 - s^3) \cdot s \, ds$

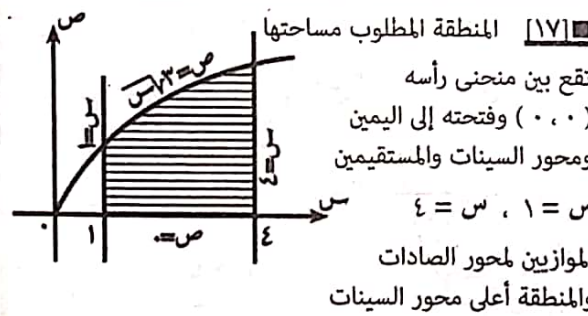
$$= \int_{-2}^3 \left[\frac{1}{4} s^4 - \frac{1}{4} s^4 \right] ds =$$

$$= \left[\frac{1}{20} s^5 - \frac{1}{20} s^5 \right]_{-2}^3 = \left[\frac{1}{20} (3^5 - (-2)^5) \right] = \frac{3}{4} \cdot 118 \text{ سم}^2$$



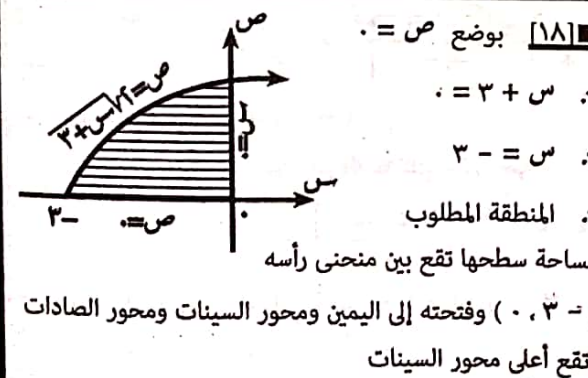
∴ مساحة سطحها = $\int_{-2}^1 (s + 2)^3 \cdot s \, ds$

$$= \int_{-2}^1 \left[\frac{1}{4} (s + 2)^4 - \frac{1}{4} (s + 2)^4 \right] ds = \left[\frac{1}{4} (s + 2)^4 - \frac{1}{4} (s + 2)^4 \right]_{-2}^1 = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \text{ سم}^2$$



∴ مساحة سطحها = $\int_1^4 \frac{1}{2} s^2 \cdot s \, ds$

$$= \int_1^4 \left[\frac{1}{2} s^3 - \frac{1}{2} s^3 \right] ds = \left[\frac{1}{8} s^4 - \frac{1}{8} s^4 \right]_1^4 = \left[\frac{1}{8} (4^4 - 1^4) \right] = \frac{1}{8} \cdot 15 = 1.875 \text{ سم}^2$$



[١٢] المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل محور

السينات بينه وبين المنحنى $s = s^2 - 4$ عندما $s = 0$

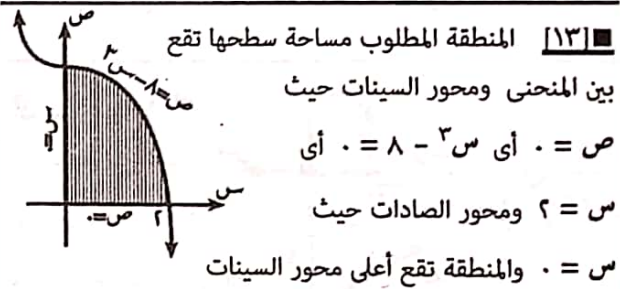
حيث نجد أن $s = -2$

أ ، $s = 2$

∴ مساحة سطحها =

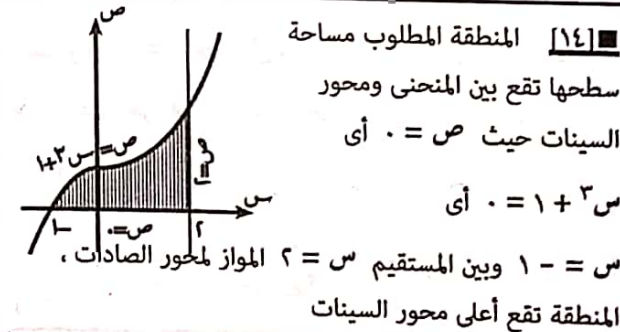
$$= \int_{-2}^2 (s^2 - 4) \cdot s \, ds$$

$$= \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{3} s^3 - \frac{1}{3} s^3 \right] ds = \left[\frac{1}{12} s^4 - \frac{1}{12} s^4 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{3} \cdot 32 = \frac{32}{3}$$



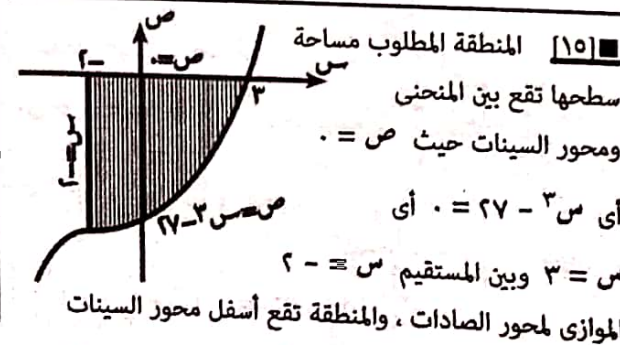
∴ مساحة سطحها = $\int_0^2 (8 - s^3) \cdot s \, ds$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4} s^4 \right] ds = \left[\frac{1}{6} s^3 - \frac{1}{20} s^5 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 - \frac{1}{20} \cdot 32 = \frac{4}{3} - \frac{8}{5} = \frac{20 - 32}{15} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5} \text{ سم}^2$$



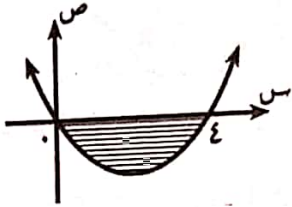
∴ مساحة سطحها = $\int_0^2 (1 + s^3) \cdot s \, ds$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{4} s^4 \right] ds = \left[\frac{1}{6} s^3 + \frac{1}{20} s^5 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 + \frac{1}{20} \cdot 32 = \frac{4}{3} + \frac{8}{5} = \frac{20 + 32}{15} = \frac{52}{15} \text{ سم}^2$$



$$= \left[\frac{2}{3} s^3 + \frac{3}{2} s^2 + 5s \right]_{-3}^1 = \left(\frac{11}{6} - \right) - \frac{43}{6} = -\frac{32}{3} \text{ سم}^2$$

■ [٢١] (أولاً) نوجد نقطتي تقاطع المنحنى مع محور السينات :



$$s^2 - 4s = 0$$

$$s(s - 4) = 0$$

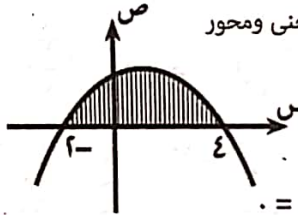
$$s = 0 \text{ أو } s = 4$$

، المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل محور السينات وأعلى المنحنى المفتوح إلى أعلى

$$\therefore \text{مساحة سطحها} = - \int_{-4}^1 (s^2 - 4s) ds$$

$$= - \left[\frac{1}{3} s^3 - 2s^2 \right]_{-4}^1 = - \left(\left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(-\frac{64}{3} - 32 \right) \right) = \frac{32}{3} \text{ سم}^2$$

■ [٢٢] نقطتي تقاطع المنحنى ومحور



السينات : بوضع $s = 0$

$$\therefore 8 - 2s - s^2 = 0$$

$$\therefore (s - 4)(s + 2) = 0$$

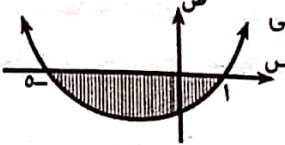
$s = 4$ أو $s = -2$ ، المنطقة المطلوب مساحة سطحها

تقع أعلى محور السينات وأسفل المنحنى المفتوح إلى أسفل

$$\therefore \text{مساحة سطحها} = \int_{-2}^4 (8 - 2s - s^2) ds$$

$$= \left[8s - s^2 - \frac{1}{3} s^3 \right]_{-2}^4 = \left(32 - 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(-16 - 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{48}{3} = 16 \text{ سم}^2$$

■ [٢٣] نقطتي تقاطع المنحنى



ومحور السينات :

بوضع $s = 0$

$$s^2 + 5s - 5 = 0 \therefore s = -5 \text{ أو } s = 1$$

$s = -5$ أو $s = 1$ ، المنطقة المطلوب مساحة سطحها

تقع أسفل محور السينات وأعلى منحنى مفتوح فتحة إلى أعلى

$$\therefore \text{مساحة سطحها} = - \int_{-5}^1 (s^2 + 5s - 5) ds$$

$$\therefore \text{مساحة سطحها} = \left[\frac{1}{3} (s^3 + 5s^2 - 5s) \right]_{-5}^1 = \frac{1}{3} (1 - 10 + 25 + 25 - 25 + 25) = \frac{40}{3}$$

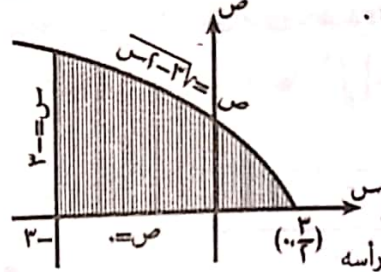
$$= \left[\frac{2}{3} (s^3 + 5s^2 - 5s) \right]_{-3}^2 = \frac{2}{3} (8 - 45 + 15 + 90 - 15 + 15) = \frac{2}{3} (48) = 32$$

$$= 32 \text{ سم}^2$$

■ [٢٤] بوضع $s = 0$

$$\therefore s^2 - 3s = 0$$

$$\therefore s = 0 \text{ أو } s = 3$$



المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع بين منحنى رأسه

$(0, \frac{9}{4})$ وفتحته إلى اليسار ومحور السينات والمستقيم

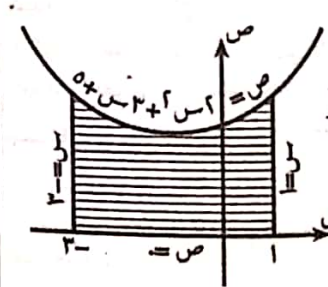
$s = -3$ ، والمنطقة أعلى محور السينات

$$\therefore \text{مساحة سطحها} = \int_{-3}^0 (s^2 - 3s) ds = \left[\frac{1}{3} s^3 - \frac{3}{2} s^2 \right]_{-3}^0 = \frac{27}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{27}{2} \right) - \left(-9 + \frac{27}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{27}{2} + 9 - \frac{27}{2} = \frac{1}{3} - 27 + 18 = -\frac{16}{3}$$

$$= - \left[\frac{2}{3} (s^3 - 3s^2) \right]_{-3}^0 = - \left(0 - \left(-\frac{54}{3} + 27 \right) \right) = -(-18 + 27) = -9$$

$$= -9 \text{ (صفر - } \frac{9}{2} \text{) } = 9 \text{ سم}^2$$



■ [٢٥] رأس المنحنى :

$$s = \frac{3}{2} \text{ أي } s = \frac{3}{2}$$

$$s = \frac{3}{2} \text{ أو } s = -\frac{3}{2}$$

$$s = \frac{3}{2} \text{ أو } s = -\frac{3}{2}$$

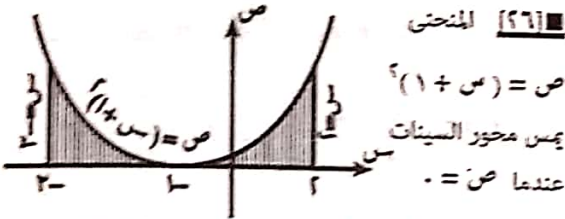
$$s = \frac{3}{2} \text{ أو } s = -\frac{3}{2}$$

المنطقة المطلوب مساحتها تقع بين منحنى رأسه

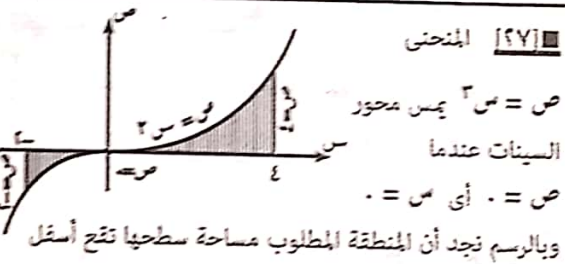
$(\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ وفتحته إلى أعلى ومحور السينات والمستقيمين :

$s = 1$ ، والمنطقة تقع أعلى محور السينات

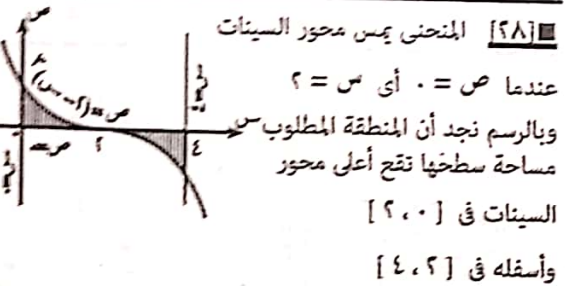
$$\therefore \text{مساحة سطحها} = \int_{-5}^1 (s^2 + 5s - 5) ds = \left[\frac{1}{3} s^3 + \frac{5}{2} s^2 - 5s \right]_{-5}^1 = \frac{1}{3} (1 - 125 + 125 - 25) = -\frac{24}{3} = -8$$



أي $(x^2 + 1) = 0$ أي $x = -1$ و $x = 1$ ، والمنطقة المطلوب
مساحة سطحها تقع أعلى محور السينات في
[-2, 2] : مساحة سطحها = $\int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx$ سم

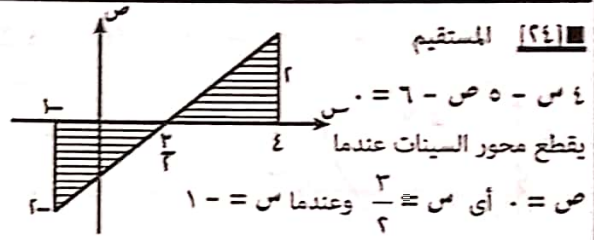


وبالرسم نجد أن المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل
محور السينات في [-2, 0] وأعلى في [0, 2]
: مساحة سطحها = $\int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx$ سم
= $-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = -\left(0 - \frac{16}{4}\right) + \left(\frac{16}{4} - 0\right) = 4 + 4 = 8$ سم



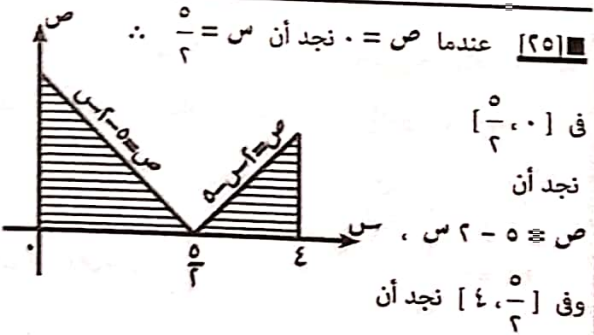
: مساحة سطحها = $\int_0^2 (x^3 - 2x^2) dx$ سم
= $\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3}\right) - \left(0 - 0\right) = 4 - \frac{16}{3} = \frac{12}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$ سم
= $-\left(\frac{4}{3} - 0\right) = -\frac{4}{3}$ سم

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{3} + 2 - 5\right] = -\left[\frac{1}{3} - 3\right] = -\left[\frac{1}{3} - \frac{9}{3}\right] = -\left[-\frac{8}{3}\right] = \frac{8}{3}$$



نجد أن ص = 0 ، وعندما س = 6 نجد أن ص = 0
وبالرسم نجد أن المنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل
محور السينات في [0, 6] وأعلى في [6, 12]

: مساحة سطحها = $\int_0^6 (6 - x) dx$ سم
= $\left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_0^6 = \left(36 - \frac{36}{2}\right) - \left(0 - 0\right) = 36 - 18 = 18$ سم

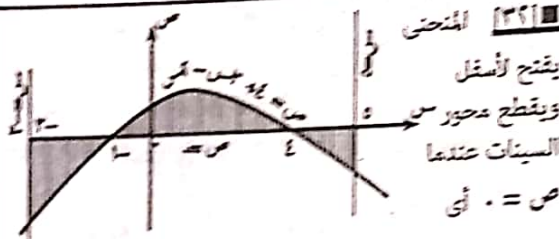


وفي كلا الفترتين المنطقة المطلوب مساحة
سطحها تقع أعلى محور السينات : مساحة سطحها =
 $\int_0^{\frac{0}{2}} (2 - x) dx + \int_{\frac{0}{2}}^0 (0 - x) dx$ سم
= $\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{0}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{0}{2}}^0 = \left(0 - \frac{0}{2}\right) - \left(-\frac{0}{2}\right) = 0$ سم

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_2^4 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_0^2 =$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{6} \right) =$$

$$\frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \left(\frac{8}{3} - 4 + 1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \frac{8}{3} + 4 - 1 + \frac{1}{6} = \frac{56}{3} - 11 = \frac{19}{3} \text{ سم}^2$$

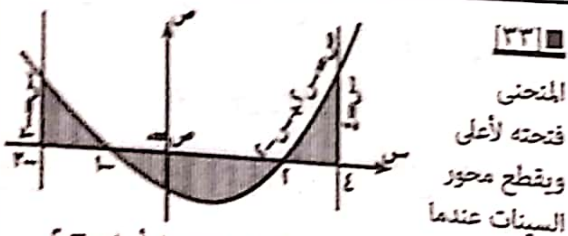


المُنحنى يفتح لأسفل ويقطع محور السينات عندما $ص = 0$ أي $س = 1$ و $س = 3$ ، والمنطقة المطلوب مساحة سطحها تتكون من ثلاثة أجزاء أحدهم فوق محور السينات في $[1, 3]$ والباقيان أسفل محور السينات في $[0, 1]$ و $[3, 4]$ ، مجموع مساحة سطحها =

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_1^3 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_3^4 =$$

$$-\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \left(\frac{27}{3} - 9 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \right) =$$

$$-\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{37}{3} - 7 + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{37}{3} + 7 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + 7 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{14}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{27}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{81}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ سم}^2$$

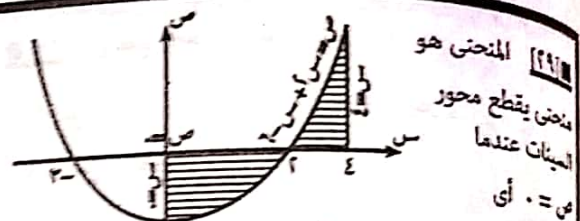


المُنحنى يفتح لأعلى ويقطع محور السينات عندما $ص = 0$ أي $س = 1$ و $س = 3$ ، مجموع مساحات المناطق المبينة بالرسم =

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_1^3 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_3^4 =$$

$$-\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \left(\frac{27}{3} - 9 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \right) =$$

$$-\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{37}{3} - 7 + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{37}{3} + 7 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{14}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{27}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{81}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ سم}^2$$

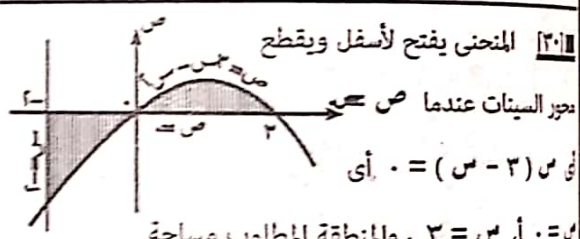


المُنحنى هو منحنى يقطع محور السينات عندما $ص = 0$ أي $س = 1$ و $س = 3$ ، والمنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل محور السينات في $[0, 1]$ وأعلى في $[1, 3]$ ، مساحة سطحها =

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_1^3 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_3^4 =$$

$$-\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \left(\frac{27}{3} - 9 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \right) =$$

$$-\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{37}{3} - 7 + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{37}{3} + 7 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{14}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{27}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{81}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ سم}^2$$

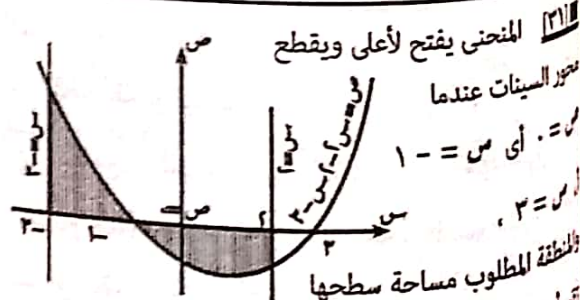


المُنحنى يفتح لأسفل ويقطع محور السينات عندما $ص = 0$ أي $س = 1$ و $س = 3$ ، والمنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أسفل محور السينات في $[0, 1]$ وأعلى في $[1, 3]$ ، مساحة سطحها =

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_1^3 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_3^4 =$$

$$-\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \left(\frac{27}{3} - 9 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \right) =$$

$$-\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{37}{3} - 7 + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{37}{3} + 7 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{14}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{27}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{81}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ سم}^2$$



المُنحنى يفتح لأعلى ويقطع محور السينات عندما $ص = 0$ أي $س = 1$ و $س = 3$ ، والمنطقة المطلوب مساحة سطحها تقع أعلى محور السينات في $[0, 1]$ وأسفله في $[1, 3]$ ، مساحة سطحها =

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_1^3 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right]_3^4 =$$

$$-\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{64}{3} - 16 + 2 - \frac{1}{6} - \left(\frac{27}{3} - 9 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \right) =$$

$$-\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} - 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{37}{3} - 7 + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{37}{3} + 7 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{14}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{3} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{27}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{74}{6} + \frac{81}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ سم}^2$$

■ [٣٧] بجمع معادلتى المستقيمين الأولين

$$\therefore 2s - 4 = 0 \therefore s = 2 \text{ وبالتعويض في أيهما}$$

$$\therefore 2s - 4 = 1 + s \therefore s = 3$$

∴ نقطة تقاطع المستقيمين

الأولين

هى $P(3, 2)$

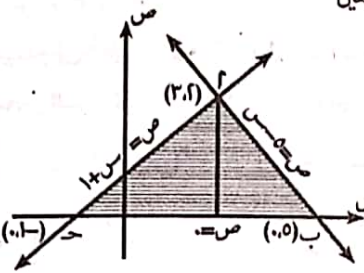
وبوضع

$s = 0$ في كل من

المعادلتين الأوليين

نحصل

على نقطتي تقاطع



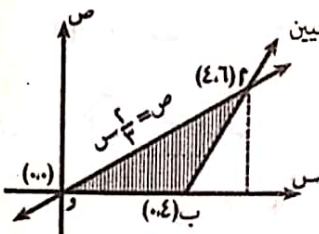
المستقيمين الأولين مع محور السينات وهما $P(0, 5)$ و $J(0, 0)$

$(0, 1)$ ويرسم المستقيمتين المذكورتين نجد أن مساحة سطح

المنطقة المحصورة بينهما $\int_0^3 (1+s) ds + \int_3^5 s ds = 9 \text{ سم}^2$

$$= \left[s + \frac{s^2}{2} \right]_0^3 + \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^5 = 9 \text{ سم}^2$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + s \right]_0^3 + \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^5 = 9 \text{ سم}^2$$



■ [٣٨] بطرح المعادلتين الأوليين

$$\therefore 2s - 8 = 0 \therefore s = 4$$

وبالتعويض

في أيهما

$$\therefore 2s - 8 = 12 - s \therefore s = 12$$

∴ $s = 6$ ∴ نقطة تقاطعها هى $P(6, 4)$ وبوضع

$s = 0$ في كل منهما

∴ نقطة تقاطع المستقيم الأول

$P(0, 4)$ ، ونقطة تقاطع

المستقيم الثانى معه هى $(0, 0)$ ومن الرسم نجد أن

مساحة سطح المنطقة المطلوبة =

$$\int_0^6 (4-s) ds + \int_6^{12} s ds = 8 \text{ سم}^2$$

$$= \left[4s - \frac{s^2}{2} \right]_0^6 + \left[\frac{s^2}{2} \right]_6^{12} = 8 \text{ سم}^2$$

■ [٣٤] المنحنى يقطع محور السينات عندما $s = 0$ أى

$$s(3-s)(s+2) = 0 \text{ أى}$$

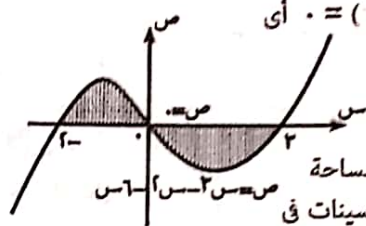
$$s = 0, 3, -2$$

وبالرسم ويحث الإشارة

نجد أن المنطقة المطلوب مساحة

سطحها تقع أعلى محور السينات في

$[0, 3]$ ، أسفلها في $[3, 0]$ ∴ مساحة سطحها



$$= \int_0^3 s ds - \int_3^0 s ds = \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^3 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^0 = \frac{9}{2}$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^3 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^0 = \frac{9}{2}$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^3 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^0 = \frac{9}{2}$$

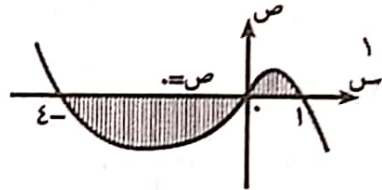
$$= \text{صفر} - \left(-\frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{63}{4} \right) - \left(-\frac{1}{12} \right) = \frac{21}{12} \text{ سم}^2$$

■ [٣٥] $s = 0$ عندما $s(4-s)(s+1) = 0$ أى

$$s = 0, 4, -1$$

∴ مساحة سطح

المنطقة المطلوبة =



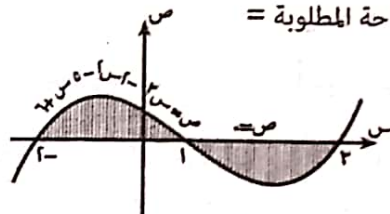
$$= \int_0^4 s ds - \int_4^0 s ds = \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^4 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_4^0 = 8$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^4 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_4^0 = 8$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^4 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_4^0 = 8$$

■ [٣٦] $s = 0$ عندما $s = -2, 1, 3$

وطبقاً للرسم تكون المساحة المطلوبة =



$$= \int_{-2}^1 s ds - \int_1^3 s ds = \left[\frac{s^2}{2} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^3 = -2$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^3 = -2$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^3 = -2$$

$$= \left(-\frac{37}{12} \right) - \left(-\frac{38}{3} \right) - \left(-\frac{9}{4} \right) = \frac{21}{12} \text{ سم}^2$$

المنحنى يقطع محور السينات (ص = 0) عندما

$$ص = (س^2 - 3س + 2) = 0$$

$$أي ص = (س - 1)(س - 2) = 0$$

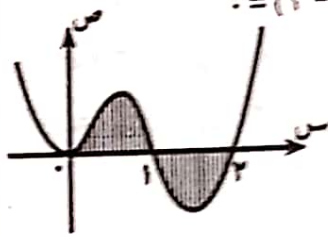
$$أي ص = 1 \text{ أو } ص = 2$$

$$ص = 1 \text{ أو } ص = 2$$

ومن الرسم نستج

أن مساحة

المنطقة المطلوبة



$$= \int_1^2 (س^2 - 3س + 2) دس = \left[\frac{س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} + 2س \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{9}{1} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{8}{3} - 9 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 9 + 4 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{7}{3} - 7 + \frac{3}{2} = \frac{14}{6} - \frac{42}{6} + \frac{9}{2} = \frac{14 - 42 + 27}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$= \left[\frac{1}{3}س^3 - \frac{3}{2}س^2 + 2س \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{9}{1} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{7}{3} - 7 + \frac{3}{2} = \frac{14 - 42 + 27}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}سم^2$$

ثانياً : مسائل على مساحة منطقة بين منحنين أو أكثر

نوجد نقطتي تقاطع المنحنى ص = $\frac{1}{3}س^2$ (1)

والمستقيم ص = 2 (2) بالطرح

$$\frac{1}{3}س^2 - 2 = 0 \Rightarrow س^2 = 6 \Rightarrow س = \sqrt{6} \text{ أو } س = -\sqrt{6}$$

$$ص = 2 \text{ عند } س = \sqrt{6} \text{ ومن (2)}$$

$$ص = 2 \text{ عند } س = -\sqrt{6}$$

نقطتي التقاطع هما (0,0) ، (2,4) ، (8,4)

ويرسم المنحنى والمستقيم نجد أن المستقيم يقع أعلى المنحنى

مساحة سطح المنطقة بينهما

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (2 - \frac{1}{3}س^2) دس = \left[2س - \frac{1}{9}س^3 \right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = \left(2\sqrt{6} - \frac{1}{9}(6\sqrt{6}) \right) - \left(-2\sqrt{6} + \frac{1}{9}(6\sqrt{6}) \right) = 4\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{8}{3}\sqrt{6}$$

$$= \left[2س - \frac{1}{9}س^3 \right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = \left(2\sqrt{6} - \frac{1}{9}(6\sqrt{6}) \right) - \left(-2\sqrt{6} + \frac{1}{9}(6\sqrt{6}) \right) = 4\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{8}{3}\sqrt{6}$$

يفرض أن ل = 0 ، ب = 0

$$ص = 1 + ل = 7سم (1)$$

$$ص = 1 + ل = 7سم$$

معادلة ب ج هي

$$\frac{ص-1}{ل-0} = \frac{7-1}{0-0}$$

$$ص = 1 + 6ل = 7سم (2)$$

معادلة ب ج هي

$$\frac{ص-1}{ل-0} = \frac{7-1}{0-0}$$

$$ص = 1 + 6ل = 7سم (3)$$

مساحة سطح المنطقة المطلوبة

$$= \int_0^7 (7 - 6ل) دل = \left[7ل - 3ل^2 \right]_0^7 = 49 - 147 = -98$$

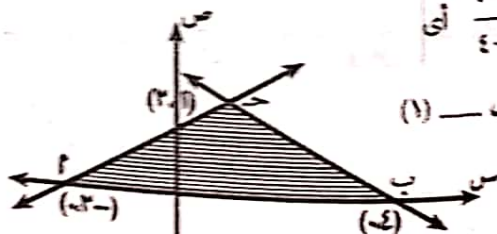
$$= \left[7ل - 3ل^2 \right]_0^7 = 49 - 147 = -98$$

$$= 14سم^2$$

معادلة ب ج هي :

$$\frac{ص-3}{ل-1} = \frac{0-3}{4-1}$$

$$ص = 3 + 3(ل-1) = 3ل (1)$$



معادلة ب ج

$$ص = 3 + 3(ل-1) = 3ل (2)$$

مساحة سطح المنطقة المطلوبة

$$= \int_0^1 (3 - 3ل) دل + \int_1^4 (3 - 3ل) دل = \left[3ل - \frac{3}{2}ل^2 \right]_0^1 + \left[3ل - \frac{3}{2}ل^2 \right]_1^4 = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) - \left(3 - \frac{9}{2} \right) + \left(12 - \frac{18}{2} \right) - \left(3 - \frac{9}{2} \right) = 0 - \left(-\frac{3}{2} \right) + \left(\frac{6}{2} - \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= \left[3ل - \frac{3}{2}ل^2 \right]_0^1 + \left[3ل - \frac{3}{2}ل^2 \right]_1^4 = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) - \left(3 - \frac{9}{2} \right) + \left(12 - \frac{18}{2} \right) - \left(3 - \frac{9}{2} \right) = 0 - \left(-\frac{3}{2} \right) + \left(\frac{6}{2} - \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

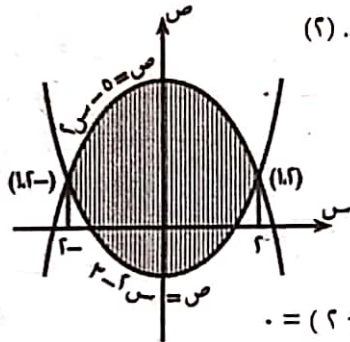
$$= 1.5سم^2$$

∴ $s = 3$ أو $s = 2$ ، والمستقيم يعلو المنحنى
∴ مساحة سطح المنطقة بينهما =

$$\int_{-2}^3 [(s-6) - (s^2 + 2s - 6)] ds = \int_{-2}^3 (-s^2 - 4s) ds = \left[-\frac{s^3}{3} - 2s^2 \right]_{-2}^3 = \left(-\frac{27}{3} - 12 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 8 \right) = -15 + \frac{8}{3} + 8 = -\frac{17}{3} \text{ سم}^2$$

■ [١٠] نوجد نقطتي تقاطع المنحنى

$$ص = s^2 - 3 \dots (١)$$



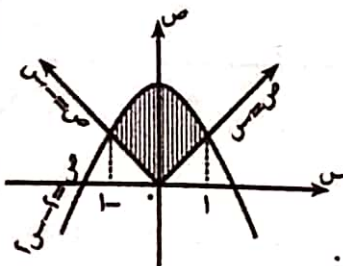
المنحنى $ص = s^2 - 3 \dots (٢)$
بالطرح

$$\therefore s^2 - 3 - (s^2 - 3) = 0$$

∴ $s = 3$ أو $s = -1$ ومن (١) ∴ $ص = 0$ ∴ نقطتي التقاطع هما $(-1, 0)$ ، $(3, 0)$ وبالرسم نجد أن المنحنى الثاني أعلى المنحنى الأول ∴ مساحة سطح المنطقة بينهما

$$= \int_{-1}^3 (s^2 - 3 - (s^2 - 3)) ds = \int_{-1}^3 0 ds = 0$$

■ [١١] نوجد نقطتي تقاطع المنحنى



$$ص = s^2 - 2 \dots (١)$$

مع فرعي الدالة

$$ص = |s| \dots (٢)$$

بالطرح

$$\therefore s^2 - 2 - |s| = 0$$

∴ عندما $s > 0$: المعادلة هي $s^2 - s - 2 = 0$ أي

$$(s-2)(s+1) = 0 \therefore s = 2 \text{ أو } s = -1$$

(مرفوض) ، عندما $s < 0$: المعادلة هي $s^2 + s - 2 = 0$ أي

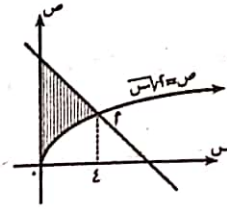
$$(s+2)(s-1) = 0 \therefore s = -2 \text{ أو } s = 1$$

$s = -2$ (مرفوض) ∴ نقطتي التقاطع هما $(-1, 1)$ ،

■ [٧] نقطة التقاطع : $(4, 4)$

من الرسم نجد أن المستقيم يعلو المنحنى في $[4, 0]$

∴ مساحة المنطقة المحصورة بينهما



$$= \int_0^4 (4 - s - s^2) ds = \left[4s - \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_0^4 = 16 - 8 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ سم}^2$$

$$= \frac{32}{3} - 16 - \frac{64}{3} = -\frac{64}{3} \text{ سم}^2$$

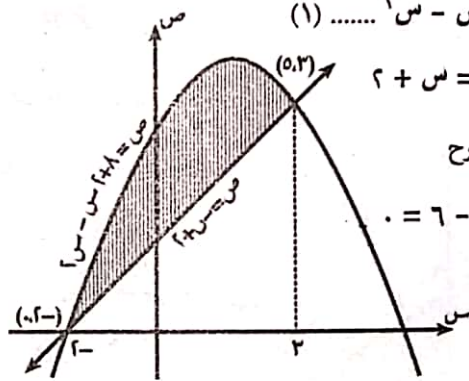
■ [٨] نوجد نقطتي تقاطع المنحنى

$$ص = s^2 + 8 \dots (١)$$

والمستقيم $ص = s + 2$

..... (٢) بالطرح

$$\therefore s^2 + 8 - (s + 2) = 0$$



$$\therefore (s+2)(s-3) = 0$$

$$\therefore s = 3 \text{ أو } s = -2 \text{ ومن (٢) } \therefore ص = 11 \text{ أو } ص = 4$$

∴ نقطتي التقاطع هما $(-2, 4)$ ، $(3, 11)$ وبالرسم نجد

أن المنحنى يعلو المستقيم ∴ مساحة المنطقة بينهما =

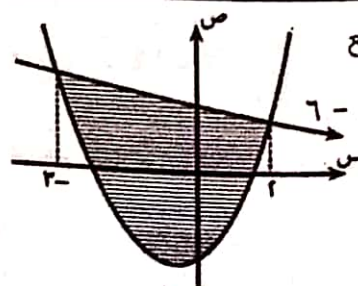
$$= \int_{-2}^3 (s^2 + 8 - (s + 2)) ds = \int_{-2}^3 (s^2 - s + 6) ds = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + 6s \right]_{-2}^3 = \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} + 18 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) = \frac{125}{6} \text{ سم}^2$$

$$= \int_{-2}^3 (s^2 - s + 6) ds = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + 6s \right]_{-2}^3 = \frac{125}{6} \text{ سم}^2$$

$$= \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + 6s \right]_{-2}^3 = \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} + 18 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) = \frac{125}{6} \text{ سم}^2$$

$$= \frac{125}{6} \text{ سم}^2$$

■ [٩] نوجد نقطتي تقاطع



المنحنى $ص = s^2 + 2$

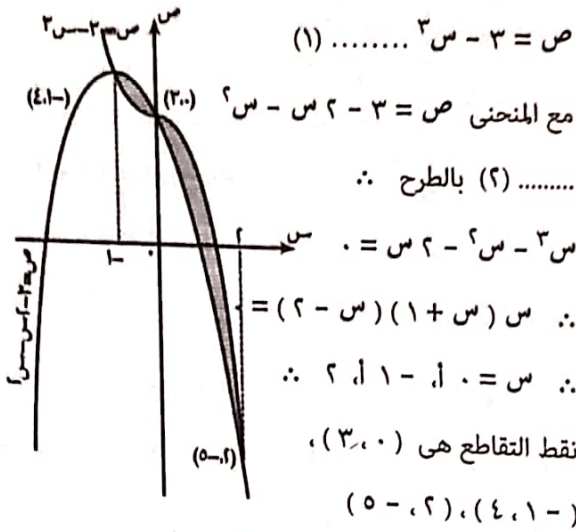
..... (١) مع المستقيم

$$ص = 2 - s \dots (٢)$$

$$\therefore (s+3)(s-2) = 0$$

$$3 \frac{1}{12} = 0 - (4 - 4 + \frac{8}{3}) + (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - \text{صفر} =$$

■ [١٧] نوجد نقط تقاطع المنحنى



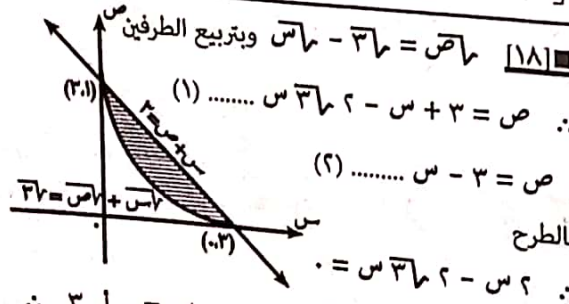
وبالرسم نجد أن مساحة سطح المنطقة بينهما

$$= \int_0^4 (3 - 3س - (3س - 3س)) دس = \int_0^4 (3 - 6س + 3س) دس = \int_0^4 (3 - 3س) دس$$

$$= \left[3س - \frac{3}{2}س^2 \right]_0^4 = 12 - 24 = -12$$

$$+ \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_0^4 = 24 - 12 = 12$$

$$3 \frac{1}{12} = \frac{32}{12} + \frac{0}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$



$$3 \frac{1}{12} = \frac{32}{12} + \frac{0}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

نقطتي تقاطع المنحنى مع المستقيم هما (٠, ٣) ، (٣, ٠)

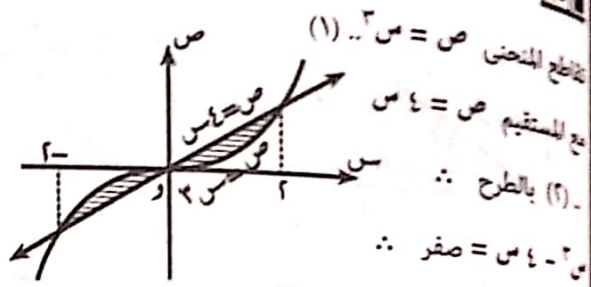
وبالرسم نجد أن المستقيم يعلو المنحنى ∴ مساحة سطح

$$\text{المنطقة بينهما} = \int_0^3 (3 - 3س - (3س - 3س)) دس = \int_0^3 (3 - 6س + 3س) دس = \int_0^3 (3 - 3س) دس$$

$$= \left[3س - \frac{3}{2}س^2 \right]_0^3 = 9 - \frac{27}{2} = \frac{18 - 27}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$-9 = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{3} = 9$$

■ [١٨] نوجد نقطتي



$$ص = 3س - 3س = 0 \Rightarrow ص = 0 \text{ أو } 1 - س = 0 \Rightarrow ص = 0 \text{ أو } س = 1$$

نقط التقاطع هي (٠, ٠) ، (١, ١) ، (٤, ٤) وبالرسم نجد أن المنحنى يعلو

المستقيم في [٠, ٢] والمستقيم يعلو المنحنى في [٢, ٤]

$$\therefore \text{مساحة سطح المنطقة بينهما} = \int_0^2 (3س - 3س - (3س - 3س)) دس + \int_2^4 (3س - 3س - (3س - 3س)) دس$$

$$= \int_0^2 (3س - 3س - 3س + 3س) دس + \int_2^4 (3س - 3س - 3س + 3س) دس = \int_0^2 0 دس + \int_2^4 0 دس = 0$$

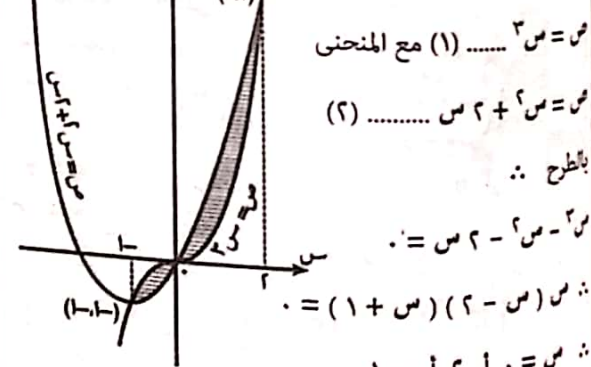
$$+ \int_2^4 (3س - 3س - 3س + 3س) دس = \int_2^4 0 دس = 0$$

$$= \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_2^4 = 6 - 6 + 24 - 18 = 6$$

$$8 = (0 - 4) + [(4 - 0) - 0] = 4$$

$$8 = (0 - 4) + [(4 - 0) - 0] = 4$$

■ [١٩] نوجد نقط تقاطع المنحنى



$$3 \frac{1}{12} = \frac{32}{12} + \frac{0}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

وبالرسم نجد أن المنحنى (١) يعلو المنحنى (٢) في [٠, ١] والمنحنى (٢) يعلو المنحنى (١) في [١, ٤] ∴ مساحة سطح

$$\text{المنطقة بينهما} = \int_0^1 (3س - 3س - (3س - 3س)) دس + \int_1^4 (3س - 3س - (3س - 3س)) دس$$

$$= \int_0^1 (3س - 3س - 3س + 3س) دس + \int_1^4 (3س - 3س - 3س + 3س) دس = \int_0^1 0 دس + \int_1^4 0 دس = 0$$

$$+ \int_1^4 (3س - 3س - 3س + 3س) دس = \int_1^4 0 دس = 0$$

$$= \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_1^4 = \frac{3}{2} - 3 + 24 - 12 = 9$$

$$= \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}س^2 - 3س \right]_1^4 = \frac{3}{2} - 3 + 24 - 12 = 9$$

[١٩]

بفرض أن نقطة التماس هي

(٢، ب) وهي تقع على المنحنى

ب = ٢ (١)

∴ ميل المماس للمحنى عند هذه النقطة

٢ = وهذا المماس يمر بالنقطتين

(٤، ٠)، (٢، ب)

ميله = $\frac{٤+ب}{٠-٢}$ ومنها ب = ٢ (٢) ومن

(١) ∴ ٢ = ٤ - ٢ ∴ ٢ = ٢ ∴ ٢ = ٢

ومن (١) ∴ ب = ٤ ∴ نقطتي التماس هما (٤، ٢) و

(٤، ٢) ∴ ميل المماس الأول = ٢ × ٢ = ٤ والثاني =

٤ - ∴ معادلتيهما هما: ص = ٤ + (٠ - س) ،

ص - ٤ = ٤ - (٠ - س) ∴ والمنحنى يعلو كل منهما في

[٠، ٢] ، [٢، ٠] ∴ مساحة سطح المنطقة بينهما

= $\int_0^2 [(٤ - س) - (٤ - س)] دس +$

$\int_2^4 [(٤ - س) - (٤ - س)] دس$

= $\left[\frac{١}{٣} س٣ - ٢ س٢ + ٤ س \right]_0^2 + \left[\frac{١}{٣} س٣ - ٢ س٢ + ٤ س \right]_2^4$

= $\frac{١٦}{٣} - \frac{٨}{٣} + \left(\frac{٨}{٣} - \frac{٨}{٣} \right) =$

المجموعة السادسة :

مسائل على حجوم الأجسام الدورانية

[١٠]

∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$

∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$

$\pi = \int_0^3 س٢ دس$

$\pi = \int_0^3 س٢ دس$

[١٢] المستقيم ص = $\frac{٣}{٢}$ س يمر بنقطة الأصل حيث

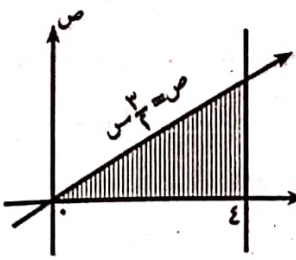
س = ٠ ∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$

$\pi = \int_0^4 س٢ دس$

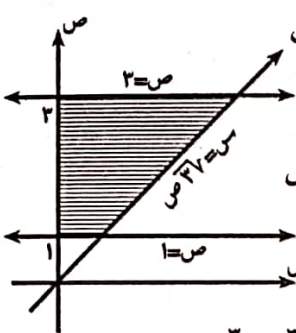
$\pi = \int_0^4 س٢ دس$

$\pi = \int_0^4 س٢ دس$

$\pi = \int_0^4 س٢ دس$



[٣] ∴ الدوران حول محور الصادات



$\pi = \int_0^4 س٢ دس$

$\pi = \int_0^4 س٢ دس$

$\pi = \int_0^4 س٢ دس$

[١٤] بوضع ص = ٠ نجد أن س = $\frac{٣}{٢}$

وبوضع س = ٠ نجد أن ص = ٣

∴ المستقيم المعطى

يقطع محور السينات

في $(٠، \frac{٣}{٢})$ ، الصادات في $(٣، ٠)$

(أولاً) عند دوران المنطقة

حول محور السينات :

∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$ ∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$

س = ٢ ∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$

= $\int_0^3 س٢ دس$

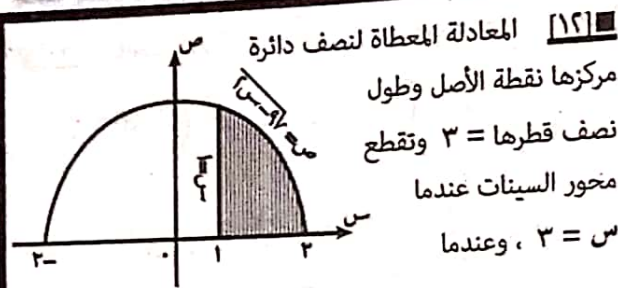
$\pi = \int_0^3 س٢ دس$

(ثانياً) عند دوران المنطقة حول محور الصادات :

∴ $\pi = \int_0^3 س٢ دس$

= $\int_0^3 س٢ دس$

[15]



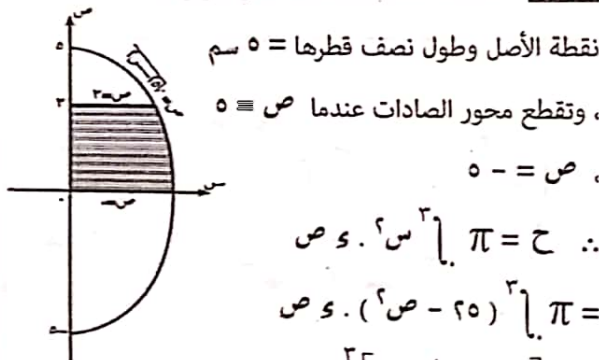
س = ۳ - ∴ π = ۲ ص ۲

$$^2 \left[2s \frac{1}{3} - s^2 \right] \pi = s \cdot (2s - 9)^2 \pi =$$

$$[(\frac{1}{3} - 9) - (9 - 27)]\pi =$$

$$r_{\text{سم}} \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \frac{r_{\lambda}}{2} = (\lambda \frac{r}{2} - 1\lambda) \pi =$$

■ [١٣] المعادلة المعطاة لنصف دائرة مركزها



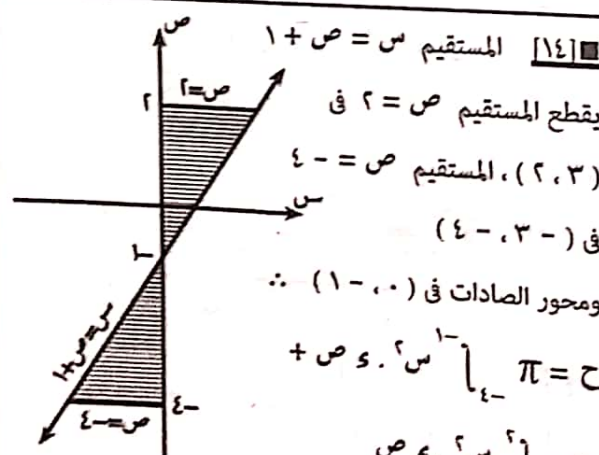
$$\therefore \pi = \tau \left[\frac{1}{s} \right] s$$

$$s \cdot (25 - 20)^2 \cdot \pi =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left[2 \frac{1}{3} - 20 \right] \pi =$$

$$r_{\text{م}} \pi 77 = [\cdot - (9 - 70)] \pi =$$

[14] ■



π [س؟ و ص

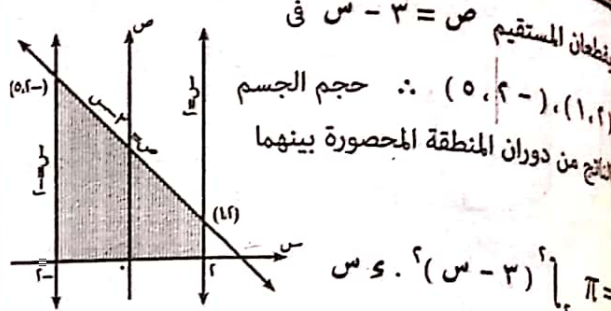
$$\int_{\Sigma} \pi = \int_{\Sigma} s \cdot (1 + v) \cdot \pi = \int_{\Sigma} s \cdot \pi$$

$$[(\gamma -) - \gamma] \frac{\pi}{r} = \frac{1}{r} \left[r(1 + \omega) \frac{1}{r} \right] \pi =$$

$$r_{\mu} \pi_{1A} =$$

المستقيمان $s = 2 -$ ، $s = 2$

10



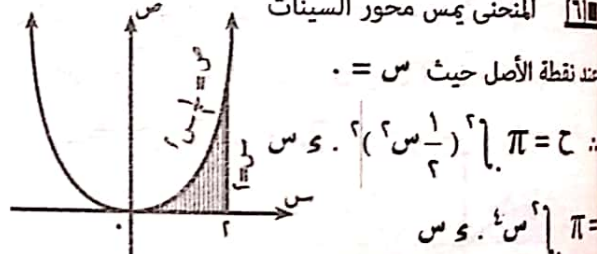
$$s \cdot (s-3) \Big|_{\pi=}$$

$$\left[\pi - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$[r(0) - r(1)] \frac{\pi}{r} = \int_{r-}^r \left[r(\omega - r) \frac{1}{r} \right] \pi =$$

$$r_{\text{سم}} \pi \frac{124}{3} = (124 -) \times \frac{\pi}{2} =$$

[٦١] المنحنى يمر محور السينات

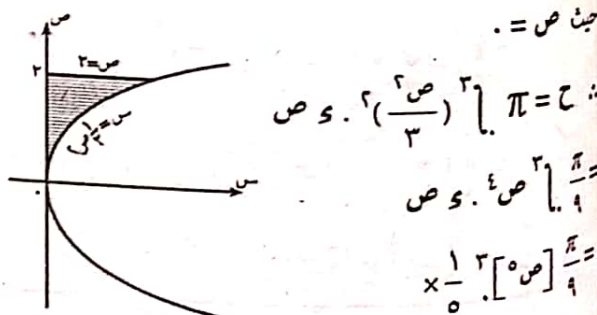


$$\pi = \left[\begin{matrix} s^1 & s^2 & s^3 \end{matrix} \right]$$

$$\pi \frac{32}{2} = [\cdot - 0.2] \frac{\pi}{2} = \times \frac{1}{2} [0.2] \frac{\pi}{2} =$$

$$= 1,6 \pi \text{ سم}^3$$

المنحني ممس محاور الصادات عند نقطة الأصل



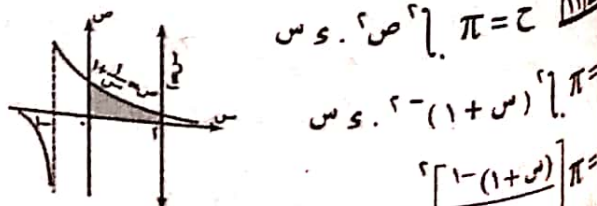
$$\pi = 2 \therefore \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = \frac{r}{r_0}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{4}}$$

$$\times \frac{1}{2} [^{\circ}\text{C}] \frac{\pi}{4} =$$

$$r_{\text{سم}} \pi \frac{r_V}{2} = 227 \times \frac{\pi}{20} =$$

$\pi = \tau$ [ص. ۵۵]



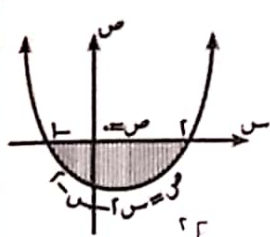
$$s \cdot \pi = (1+s)^{-1}$$

$$r \left[\frac{1 - (1 + \mu)^n}{1 - \mu} \right] \pi =$$

$$r_{\text{ps}} \pi \frac{r}{r} = \left[(1) - \frac{1}{r} \right] \pi r^2$$

■ [١٩] المنحنى المعطى فتحته إلى أعلى ويقطع محور السينات

عندما $0 = (س + ١) (س - ٢)$ أى $س = ٢$ ، $س = -١$



$$\therefore \text{ح} = \int_{-1}^2 \pi \cdot س^2 \cdot دس$$

$$\pi = \int_{-1}^2 \pi (س^3 - س^2) دس$$

$$= \pi \left[\frac{س^4}{4} - \frac{س^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{١٦}{4} - \frac{٨}{3} \right) - \left(\frac{١}{4} - \frac{١}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(٤ - \frac{٨}{3} \right) - \left(\frac{١}{4} - \frac{١}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{١٢}{3} - \frac{٨}{3} \right) - \left(\frac{٣}{١٢} - \frac{٤}{١٢} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{٤}{3} \right) - \left(-\frac{١}{١٢} \right) \right]$$

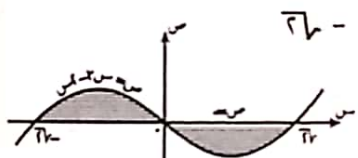
$$= \pi \left[\frac{٤}{3} + \frac{١}{١٢} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{١٧}{١٢} \right]$$

$$= \frac{١٧\pi}{١٢}$$

■ [٢٠] المنحنى المعطى يقطع محور السينات عندما

$0 = (س - ٢) (س + ٢)$ أى $س = ٢$ ، $س = -٢$



$$\therefore \text{ح} = \int_{-2}^2 \pi \cdot س^2 \cdot دس$$

$$\pi = \int_{-2}^2 \pi س^3 دس$$

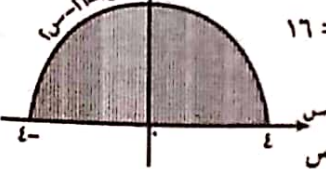
$$= \pi \left[\frac{س^4}{4} \right]_{-2}^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{١٦}{4} \right) - \left(\frac{١٦}{4} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(٤ \right) - \left(٤ \right) \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

■ [٢١] الدائرة تقطع محور السينات



$$\therefore \text{ح} = \int_{-4}^4 \pi \cdot س^2 \cdot دس$$

$$\pi = \int_{-4}^4 \pi س^3 دس$$

$$= \pi \left[\frac{س^4}{4} \right]_{-4}^4$$

$$= \pi \left[\left(\frac{٢٥٦}{4} \right) - \left(\frac{٢٥٦}{4} \right) \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

■ [١٥] المنحنى المذكور يمر بنقطة الأصل حيث $س = ٠$

$$\therefore \text{ح} = \int_{-1}^1 \pi \cdot س^2 \cdot دس$$

$$\pi = \int_{-1}^1 \pi س^3 دس$$

$$= \pi \left[\frac{س^4}{4} \right]_{-1}^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{١}{4} \right) - \left(\frac{١}{4} \right) \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

■ [١٧] المنحنى المعطى فتحته إلى أعلى ويقطع

محور السينات عندما $س = ٠$

أى $س = ٢$ ، $س = -٢$

أى عندما $س = ٠$

أى $س = ٢$

$$\therefore \text{ح} = \int_{-2}^2 \pi \cdot س^2 \cdot دس$$

$$\pi = \int_{-2}^2 \pi س^3 دس$$

$$= \pi \left[\frac{س^4}{4} \right]_{-2}^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{١٦}{4} \right) - \left(\frac{١٦}{4} \right) \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

■ [١٨] المنحنى المعطى فتحته

إلى أعلى ويمس محور السينات

عندما $س = ٢$ ، أى $س = ٠$

$$\therefore \text{ح} = \int_{-2}^2 \pi \cdot س^2 \cdot دس$$

$$\pi = \int_{-2}^2 \pi س^3 دس$$

$$= \pi \left[\frac{س^4}{4} \right]_{-2}^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{١٦}{4} \right) - \left(\frac{١٦}{4} \right) \right]$$

$$= \pi \left[٠ \right]$$

∴ س = ١، ٣ ومن الرسم نجد أن المنحنى يعلو المستقيم

$$\therefore \pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^2 - s^3) \cdot s \, ds$$

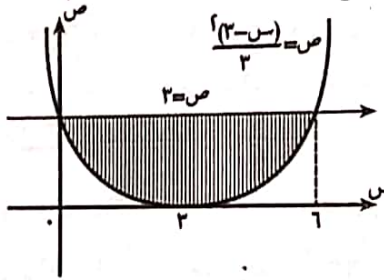
$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^3 - s^4) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^4 - s^5) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^5 - s^6) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^6 - s^7) \cdot s \, ds$$

نقطتي التقاطع



هما (٣، ٠)

(٣، ٦)

ومن الرسم نجد أن المنحنى يعلو المستقيم

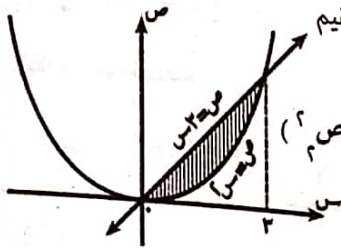
$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^2 - s^3) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^3 - s^4) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^4 - s^5) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^5 - s^6) \cdot s \, ds$$

نقطتي التقاطع هما (٠، ٠)، (٩، ٣)



ومن الرسم نجد أن المنحنى يعلو المستقيم

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^2 - s^3) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^3 - s^4) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^4 - s^5) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^5 - s^6) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^6 - s^7) \cdot s \, ds$$

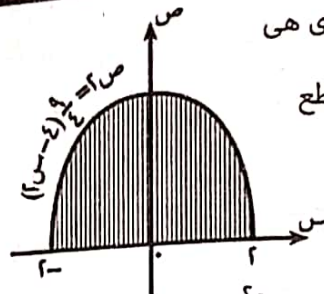
$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^7 - s^8) \cdot s \, ds$$

معادلة المنحنى المعطى هي

$$s^2 = (s - 1)^2$$

وهو يقطع محور السينات عندما

$$s = 0$$

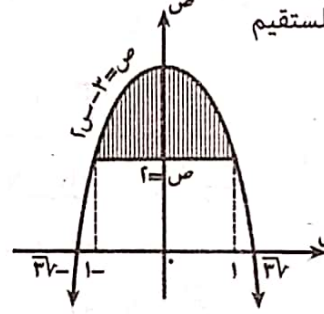


$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^2 - s^3) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^3 - s^4) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^4 - s^5) \cdot s \, ds$$

نوجد نقطتي تقاطع المستقيم



ص = ٢ (١) والمنحنى

ص = ٣ - س (٢)

وفتحته إلى أسفل

بطرح (٢) - (١)

$$s = 1$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^2 - s^3) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^3 - s^4) \cdot s \, ds$$

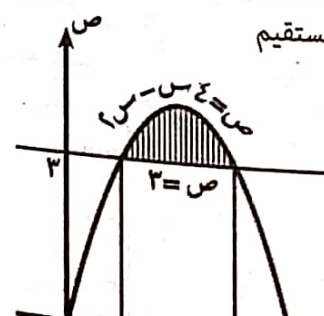
$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^4 - s^5) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^5 - s^6) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^6 - s^7) \cdot s \, ds$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^7 - s^8) \cdot s \, ds$$

نوجد نقطتي تقاطع المستقيم



ص = ٣ (١) مع المنحنى

ص = ٤ - س (٢)

وفتحته إلى أسفل بالطرح

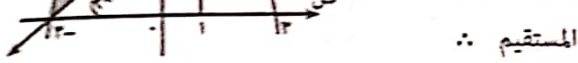
$$s = 3$$

$$\pi = \int_1^3 \pi \cdot (s^2 - s^3) \cdot s \, ds$$

■ [٢٧] نقطتي التقاطع هما

$$(-0.3, 0), (2, 1)$$

ومن الرسم نجد أن الدائرة تعلو المستقيم



$$\pi = \int_{-0.3}^2 (1 - (x - 0.3)^2) dx$$

$$\pi = \int_{-0.3}^2 (1 - (x^2 - 0.6x + 0.09)) dx$$

$$\pi = \int_{-0.3}^2 (1 - x^2 + 0.6x - 0.09) dx$$

$$\pi = \left[x - \frac{x^3}{3} + 0.3x^2 - 0.09x \right]_{-0.3}^2$$

$$= 16\pi$$

■ [٢٨] نقطتي التقاطع هما

$$(0, 0), (2, 2)$$

ومن الرسم نجد أن المنحنى العلوي المستقيم



$$\pi = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$\pi = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

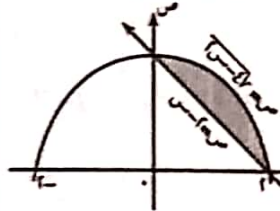
$$\pi = \left[4 - \frac{8}{3} \right]$$

$$\pi = \frac{4}{3}$$

■ [٢٩] نقطتي التقاطع هما

$$(0, 0), (2, 0)$$

والدائرة تعلو المستقيم



$$\pi = \int_0^2 (2 - (x - 1)^2) dx$$

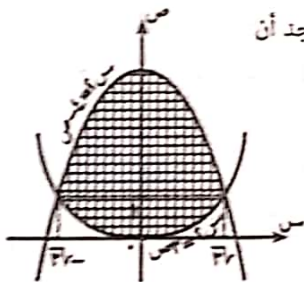
$$\pi = \int_0^2 (2 - x^2 + 2x - 1) dx$$

$$\pi = \left[x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2$$

■ [٣٠] نقطتي التقاطع هما

وبملاحظة أن المنحنى الأول يمس محور السينات في (0,0)، والمنحنى الثاني يقطع محور الصادات

في (4,0) نجد أن



إذا كان الدوران حول محور السينات فإن:

$$\pi = \int_0^4 (4 - x^2) dx$$

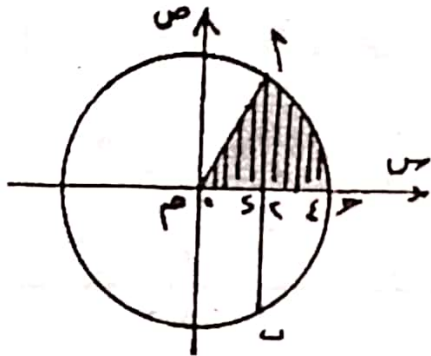
$$\pi = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$\pi = \left[16 - \frac{64}{3} \right]$$

$$= \left[\left(\frac{4}{3} \right)^3 \left(2 + \frac{4}{3} \right)^2 \right] \cdot \frac{3}{4} \times \pi =$$

$$= \left[\left(\frac{4}{3} \right)^3 \left(2 + \frac{4}{3} \right)^2 \right] \pi \frac{3}{4} =$$

$$= \pi \frac{408}{4} = (\pi - 216) \pi \frac{1}{4} =$$



[37]

القطعة الكروية تنتج من دوران القطعة الدائرية المستوية جـ

التي ارتفاعها جـ = 2 سم، ووترها \overline{AB} من الدائرة التي

مركزها م، وطول نصف قطرها = 4 سم. وبأخذ م جـ

محوراً للسينات، والقطر العمودي عليه محوراً للصادات .

معادلة القوس جـ هي $\widehat{AB} = \theta + \theta = 2\theta$

ص = 16 - 2 سم . حجم القطعة الكروية =

$$\pi \left[\frac{1}{3} (2 - 16) \right] = \pi \left[\frac{1}{3} (2 - 16) \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} (2 - 16) \right] = \pi \left[\frac{1}{3} (2 - 16) \right] =$$

ص = 3 سم . وينتج من دوران Δ مخروط حجمه =

$$\pi \left[\frac{1}{3} (3 - 2) \right] = \pi \left[\frac{1}{3} (3 - 2) \right] =$$

$$\pi \left[\frac{1}{3} (3 - 2) \right] = \pi \left[\frac{1}{3} (3 - 2) \right] =$$

حجم القطاع الكروي الناتج من دوران القطاع جـ

$$= \pi \frac{64}{3} = \pi \frac{64}{3} =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

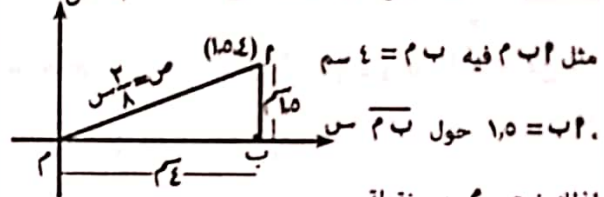
$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

[38] المخروط ينتج من دوران سطح مثلث قائم



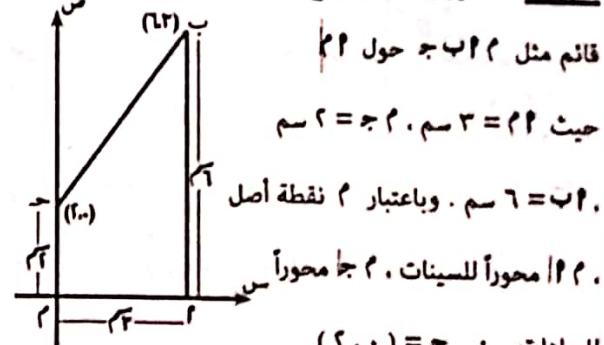
الأصل، م ب محوراً للسينات

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

[39] المخروط الناقص ينتج من دوران سطح شبه منحرف



للصادات . جـ = (2,0)

ب = (6,3) . معادلة ب جـ هي

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

$$= \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi = \left[\frac{128}{3} - \frac{128}{3} \right] \pi =$$

(ثانياً) للدوران حول محور الصادات:

الجسم الناتج هو عبارة عن مخروط ناقص حجمه =

$$\pi \left[\frac{1}{3} \left(6 + \frac{2}{3} \right) \right] \pi = \pi \left[\frac{1}{3} \left(6 + \frac{2}{3} \right) \right] \pi$$

$$\pi \left[\frac{1}{3} \left(6 + \frac{2}{3} \right) \right] \pi = \pi \left[\frac{1}{3} \left(6 + \frac{2}{3} \right) \right] \pi$$

$$\left[\frac{216}{3} - 9 \right] \pi \frac{2}{3} = \left[\frac{2}{3} \left(6 + \frac{2}{3} \right) \right] \pi \frac{2}{3} =$$

$$\pi 42 =$$

المجموعة السابعة:

مسائل من الامتحانات السابقة

$$11 \quad (f) \quad s - s = 0 \text{ عندما } s = 0, \text{ ا } s = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} s - s = 0 \\ s - s = 1 \end{array} \right\} = |s - s| \quad \therefore \left. \begin{array}{l} s - s = 0 \\ s - s = 1 \end{array} \right\} = |s - s|$$

$$\therefore \text{المقدار} = \left[\frac{1}{3} (s - s) \right] + \left[\frac{1}{3} (s - s) \right]$$

$$\left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] =$$

$$1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) =$$

$$(b) \text{ نفرض } s - 1 = s = 3 \therefore s - 1 = 3 \text{ و } s =$$

$$= 3 - 3 = 0 \text{ و } s = 1 \text{ عندما } s = 1 \text{ فإن } s = 0$$

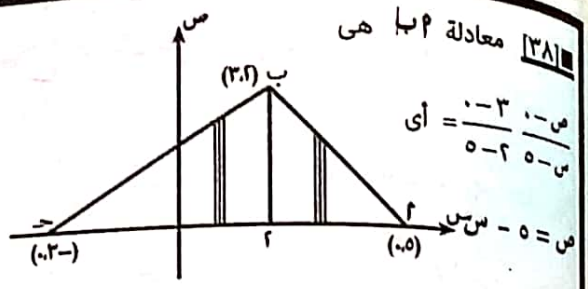
$$\therefore \text{المقدار} = \left[\frac{1}{3} (3 - 1) \right] \times \left[\frac{1}{3} (3 - 1) \right] \times \left[\frac{1}{3} (3 - 1) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{3} (3 + 6 - 3) \right] \times \left[\frac{1}{3} (3 + 6 - 3) \right] \times \left[\frac{1}{3} (3 + 6 - 3) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{6}{7} - \frac{3}{4} \right) \right] =$$

$$\frac{57}{140} = \frac{3}{10} + \frac{6}{7} - \frac{3}{4} =$$

معادلة ب ج ا هي



$$\frac{0-3}{0-0} = \frac{0-3}{0-0} \text{ أي } \frac{0-3}{0-0} = \frac{0-3}{0-0}$$

ومعادلة ب ج ا

$$\frac{0-3}{3+0} = \frac{0-3}{3+0} \text{ أي } \frac{0-3}{3+0} = \frac{0-3}{3+0}$$

والجسم الناتج من الدوران هو عبارة عن مخروطين وحجمه =

$$\pi \left[\frac{1}{3} (3 + 0) \right] \pi + \pi \left[\frac{1}{3} (3 + 0) \right] \pi$$

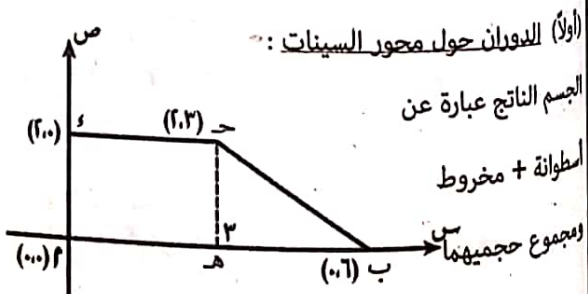
$$\pi \left[\frac{1}{3} (3 + 0) \right] \pi - \pi \left[\frac{1}{3} (3 + 0) \right] \pi =$$

$$\pi 42 = [9 - 0] \pi - [0 - \frac{120}{3}] \pi \frac{9}{20} =$$

معادلة ب ج ا هي

$$\frac{0-3}{6-3} = \frac{0-3}{6-3} \text{ أي } \frac{0-3}{6-3} = \frac{0-3}{6-3}$$

معادلة ج ا هي



(أولاً) للدوران حول محور السينات:

الجسم الناتج عبارة عن

اسطوانة + مخروط

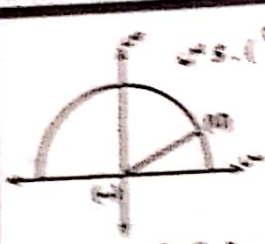
ومجموع حجميهما =

$$\pi \left[\frac{1}{3} (6 - 0) \right] \pi + \pi \left[\frac{1}{3} (6 - 0) \right] \pi$$

$$\left[\frac{1}{3} (6 - 0) \right] \pi + \left[\frac{1}{3} (6 - 0) \right] \pi =$$

$$\pi 16 = [9 - 0] \pi \frac{4}{9} + [0 - 3] \pi \frac{4}{9} =$$

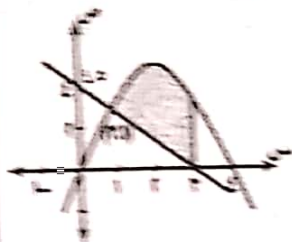
لا



$$\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] \pi r = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 0 \quad (7)$$

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] =$$



$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{11}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$v_1 \left[\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right] = \frac{1}{v_2} \quad (b)$$

$$\xi = (1 - \gamma) \zeta =$$

$$\|u - v\|_2^2 = \|u - v\|_1^2 \quad (i) \quad \square$$

$$S_2 \cdot (S - T) = S_2 \cdot (V - \frac{V}{r})$$

$$SS.\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + SS.\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} +$$

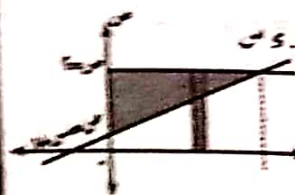
$$\frac{1}{a} \left[\frac{a^2}{a} - \frac{a^2}{a} \right] + \frac{1}{b} \left[\frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b} \right] + \frac{1}{c} \left[\frac{a^2}{c} - \frac{a^2}{c} \right] =$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 2 = \frac{2}{1}, \quad 3 = \frac{3}{1}, \quad 4 = \frac{4}{1}, \quad 5 = \frac{5}{1}, \quad 6 = \frac{6}{1}, \quad 7 = \frac{7}{1}, \quad 8 = \frac{8}{1}, \quad 9 = \frac{9}{1}, \quad 10 = \frac{10}{1}$$

$$S_2 \cdot (v_1 - v_2) \cdot \pi =$$



$$25. [(1 + \epsilon) - \epsilon] \pi$$

$$\left[\frac{(1+\sigma)}{r} - \sigma \right] \pi$$

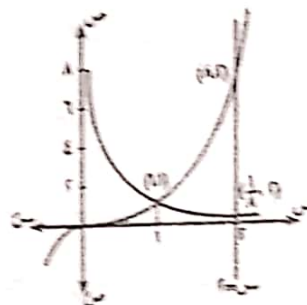
$$\pi \frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{1}{r} + \frac{A}{r} - 2 \right) \pi$$

\Rightarrow و س = ۲ ع . و ع . عندما س = ۱ - ع . = ع .

ب. المقدار = $[-(1 - e^2) \times e \times e^2] \times e$

$$r \left[r \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = 2.5 \cdot (2 - 1) \cdot 1 = 2.5$$

$$\frac{z}{10} = [1 - (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})] r =$$



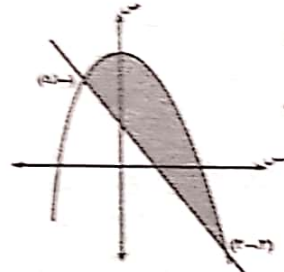
(ب) اِسّے ۲۰۰

١٢٠

$$\left[\frac{1}{\omega^2} \right] + \left[\frac{1}{\omega^2} \right] =$$

$$\frac{c}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \right) + \frac{1}{\lambda} =$$

$$s. [(x^2 - 2) - (x^2 - 6)] = 4 \quad (ii) \quad \underline{Nil}$$



$$s = \left[\frac{1}{3} s_1 - s_2 + s_3 \right]$$

$$-(9-9+9)=$$

$$\frac{rr}{r} = \left(\frac{1}{r} + 1 + r - \right)$$

(ب) المقدار = $\left[\left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^2 \right]_1^2$

$$\frac{y}{y^*} = \left[r^{-(\sigma)} - r^{-\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)} \right] \frac{1}{\epsilon} = \left[\frac{r^{-\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)}}{\epsilon} \right] =$$

$$[18] \quad (f) \quad \left[\frac{1}{2} (1 + s + s^2) \right]_{s=1} \times \frac{1}{2} (1 + s^2) \quad (f)$$

$$T_1[s] + \lambda T_2[1 + s + s^2] = s \cdot 0 + s \cdot 0$$

$$0 = 0 + \text{صفر} =$$

[١٣] $\left[\frac{س}{١-س} \right]$: نفرض أن $س = ٢ - ١$

$\therefore س = ٢ - ١$ و $س = ٢ - ١$ $\therefore س = ٢ - ١$

$س = \frac{١}{٢} (١ + س) \therefore \text{المقدار} = \frac{١}{٢} \times \frac{(١ + س)}{\frac{١}{٢}}$

$\frac{١}{٢} و س = \frac{١}{٨} \left[\frac{س + ٢ + ١}{\frac{١}{٢}} \right]$

$\frac{١}{٨} = \left[\frac{س + ٢ + ١}{\frac{١}{٢}} \right]$

$\frac{١}{٨} = \left[\frac{س + ٢ + ١}{\frac{١}{٢}} \right]$

$\frac{١}{٨} \times \frac{٢}{١٥} = \frac{٢}{١٥} (٣ + س)$

$\frac{١}{٦٠} \sqrt{١-س} = \frac{١}{٦٠} (١٠ + س)$

$\frac{١}{٦٠} \sqrt{١-س} = \frac{١}{٦٠} (١٠ + س)$

$٢٠ - ١٥ = ١٠ + س$

$\frac{١}{٦٠} \sqrt{١-س} = \frac{١}{٦٠} (١٠ + س)$

$\frac{١}{١٥} \sqrt{١-س} = \frac{١}{١٥} (٢ + س)$

[١٤] $\left[\frac{س-١}{س} \right]$: نفرض $س = ١ - س$

$\therefore س = ١ - س$ و $س = ١ - س$ $\therefore س = ١ - س$

$\frac{١}{٢} - \left[\frac{س-١}{س} \right] = \frac{١}{٢} - \left[\frac{س-١}{س} \right]$

$= \frac{١}{٢} - \left[\frac{س-١}{س} \right]$

[١٥] $\left[\frac{١-س}{١+س} \right]$: نفرض أن $س = ١ - س$

$\therefore س = ١ - س$ و $س = ١ - س$ $\therefore س = ١ - س$

$\therefore \text{المقدار} = \frac{١-س}{١+س}$

$= \frac{١-س}{١+س}$

[١٦] $\left[\frac{س}{س+١} \right]$: نفرض أن $س = ١ - س$

$\therefore س = ١ - س$ و $س = ١ - س$ $\therefore س = ١ - س$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (١ - س)$

$\frac{١}{٢} = \left[\frac{س}{س+١} \right]$

$\frac{١}{٢} = \left[\frac{س}{س+١} \right]$

$\frac{١}{٢} = \left[\frac{س}{س+١} \right]$

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣٥} = \frac{١}{٣٥} (٥ - س)$

$\frac{١}{٧٠} (٣ + س) = \frac{١}{٧٠} (٣٥ - س)$

$٣٥ - ٤٥ = ٣ + س$

$١٠ - ٦٣ = س$

$\frac{١}{٧٠} (٣ + س) = \frac{١}{٧٠} (٣٥ - س)$

[١٧] $\left[\frac{س}{٢+س} \right]$: نفرض $س = ٣ - س$

$\therefore س = ٣ - س$ و $س = ٣ - س$ $\therefore س = ٣ - س$

$\therefore \text{المقدار} = \frac{س}{٢+س}$

$\frac{١}{٦} = \frac{س}{٢+س}$

[١٨] $\left[\frac{س}{١+س} \right]$: نفرض أن $س = ١ + س$

$\therefore س = ١ + س$ و $س = ١ + س$ $\therefore س = ١ + س$

$\left[\frac{س}{١+س} \right] = \left[\frac{س}{١+س} \right]$

$س = ١ + س$

$(س = ١ + س)$

[١٩] $\left[\frac{١+س}{١-س} \right]$: نفرض $س = ١ - س$

$\therefore س = ١ - س$ و $س = ١ - س$ $\therefore س = ١ - س$

$\frac{١+س}{١-س} = \frac{١+س}{١-س}$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (١ - س)$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (١ - س)$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (١ - س)$

[١٧] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ∴ المقدار = $\frac{1}{س} \times \frac{1}{س} + \frac{1}{س}$

$\frac{1}{س} + \frac{1}{س} = \frac{2}{س}$ (لورس) س^٤ + ث

[١٨] (لورس) س^٤ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ∴ المقدار = $\frac{1}{س} \times \frac{1}{س} + \frac{1}{س}$

لورس + ث = لورس | لورس + ث

[١٩] (لورس) س^٤ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ، ع = هـ س^٤

∴ ع = $\frac{1}{س}$ هـ س^٤ ∴ المقدار = هـ س^٤ - هـ س^٤ - [هـ س^٤]

و س = هـ س^٤ - هـ س^٤ - هـ س^٤ + ث = هـ س^٤ (١ - س) + ث

[٢٠] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = س^٣

∴ و ص = س^٣ ، ع = هـ س^٣

∴ ع = هـ س^٣ ∴ المقدار = هـ س^٣ - هـ س^٣ - [هـ س^٣]

∴ هـ س^٣ - هـ س^٣ - هـ س^٣ + ث = هـ س^٣ (١ - س) + ث

[٢١] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = س^٣

∴ و ص = س^٣ ، ع = هـ س^٣

∴ ع = هـ س^٣ ∴ المقدار = هـ س^٣ - هـ س^٣ - [هـ س^٣]

∴ هـ س^٣ - هـ س^٣ - هـ س^٣ + ث = هـ س^٣ (١ - س) + ث

$\frac{1}{س} - \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{2}{س}$

$\frac{1}{س} - \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{2}{س} = \frac{1}{س} - \frac{2}{س}$

$\frac{1}{س} - \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{2}{س} = \frac{1}{س} - \frac{2}{س}$

[٢٢] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = س^٣

∴ و ص = س^٣ ، ع = هـ س^٣

∴ ع = س^٣ ، ع = هـ س^٣

∴ المقدار = $\frac{1}{س} \times \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س}$

$\frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س}$

$\frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س}$

[٢٣] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ، ع = س^٣ ، ع = س^٣

∴ ع = س^٣ ∴ المقدار = س^٣ - س^٣ - [س^٣]

∴ س^٣ - س^٣ - س^٣ + ث = س^٣ (١ - س) + ث

[٢٤] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ، ع = س^٣ ، ع = س^٣

∴ ع = س^٣ ∴ المقدار = س^٣ - س^٣ - [س^٣]

∴ المقدار = س^٣ - س^٣ - [س^٣]

∴ لورس : نفرض أن ق = لورس

∴ و ق = $\frac{1}{س}$ ، هـ = س^٣ ، هـ = س^٣

∴ لورس : نفرض أن ق = لورس

∴ لورس - س + ث بالتعويض في (١)

∴ المقدار = س^٣ - [س^٣ - س] + ث

∴ س^٣ - س^٣ + س + ث = س^٣ - س^٣ + س + ث

∴ س^٣ - س^٣ + س + ث = س^٣ - س^٣ + س + ث

[٢٥] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ، ع = س^٣ ، ع = س^٣

∴ المقدار = $\frac{1}{س} - \frac{1}{س} + س = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} + س$

$\frac{1}{س} - \frac{1}{س} + س = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} + س = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} + س$

[٢٦] (لورس) س^٣ : نفرض أن ص = لورس

∴ و ص = $\frac{1}{س}$ ، ع = س^٣ ، ع = س^٣

$$\text{ميل المحل} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ ص} \Rightarrow \left[\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ ص} \right]$$

$$= \text{لور} | 3 - 3 | + 3 = 0 \text{ ، النقطة } (3, 0) \in \text{المنحنى}$$

$$\therefore 3 = 3 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 3 = 3$$

$$\therefore \text{معادلة المنحنى: ص} = \text{لور} | 3 - 3 | + 3 = 3$$

$$\text{[٢٩] ص} = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} + \frac{1}{3} \text{ ص} \right] \text{ : نفرض أن}$$

$$1 = 1 \text{ ص} \Rightarrow 1 = 1 \text{ ص} \Rightarrow 1 = 1 \text{ ص}$$

$$\therefore \text{ص} = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 - 1) \right] = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times 0 \right] = 0$$

$$1 = \frac{1}{3} \text{ ص} \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \text{معادلة المنحنى هي: } \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\text{ص} = \frac{1}{3} \text{ ص} \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\text{[٣٠] } \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \text{ب} = \text{صفر} \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \text{ص} = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 - 1) \right] = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times 0 \right] = 0$$

$$+ 3 = 3 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 3 = 3$$

$$+ 3 = 3 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 3 = 3$$

$$\therefore 6 = 6 \Rightarrow \text{معادلة المنحنى هي:}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (3 - 3) + 3 = 3$$

$$\text{ص} = 3 - 3 = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 3 = 3$$

$$\text{ص} = 0 \Rightarrow \text{عندما ص} = 1 \text{ ، ص} = 3$$

$$> 0 \text{ (قيمة عظمى)}$$

$$\therefore (1, 1) \text{ نقطة قيمة عظمى محلية}$$

$$\text{و ع} = \text{و ع} \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) = \frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{ص} = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) \right] = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 \right] = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{نفرض أن} 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\text{و م} = \text{و م} \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) \right] = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 \right] = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \text{بالتعويض في (١):}$$

$$\text{المقدار} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) = \frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\text{[٢٧] } \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) \right] = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 \right] = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{نفرض أن} 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\text{و ع} = \text{و ع} \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) = \frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{ص} = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) \right] = \left[\frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 \right] = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{نفرض أن} 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ ص} = 1 \Rightarrow \text{ص} = 3$$

$$\text{ص} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) = \frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) = \frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{3} \text{ ص} \times (1 + 1) = \frac{1}{3} \text{ ص} \times 2 = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$\text{[٢٨] ميل العمودي} = 3 - 3 = 0$$

تمارين (٤ - ٢) من الكتاب المدرسي

[١] ص = قتا^٢س و س = - ظنا^٢س + ث ، عند

ص = ٢ ، س = $\frac{\pi}{4}$ فإن ٢ = - ظنا^٢٤٥ + ث \therefore ث = ٣
 \therefore ص = ٣ - ظنا^٢س

[٢] ٢ جتا^٢س و س = ٢ \times $\frac{1}{4}$ [(١ + جتا^٢س)]

و س = [(١ + جتا^٢س) و س = س + $\frac{1}{4}$ جا^٢س + ث

[٣] قاس^٢س ظاس و س = قاس^٢س (قاس^٢س)

و س = $\frac{1}{4}$ قاس^٢س + ث

[٤] [(٢ + س٣) جاس و س :]

نفرض أن ص = ٣ + س٣ \therefore و ص = ٣ و س ،

و ع = جاس و س \therefore ع = - جتا^٢س \therefore

المقدار = (٢ + س٣) \times - جتا^٢س + ٣ جتا^٢س و س

= - (٢ + س٣) جتا^٢س + ٣ جاس + ث

[٥] [٣ جتا^٢س و س = ٣ جاس + ث]

[٦] قتا^٢ (٣ + س٢) و س

= - $\frac{1}{4}$ ظنا^٢ (٣ + س٢) + ث

[٧] ظاس جتا^٢س و س = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \text{جتاس و س}$

= [جاس و س = - جتا^٢س + ث]

[٨] [جاس جتا^٢س و س = $\frac{1}{4}$ جا^٢س و س]

= $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ جتا^٢س + ث = - $\frac{1}{4}$ جتا^٢س + ث

[٩] [(١ + ظاس) جتا^٢س و س]

= [قاس^٢س جتا^٢س و س = [و س = س + ث]

[١٠] [(حاس - حتا^٢س) و س]

= [(جا^٢س + جتا^٢س - ٢ جاس جتا^٢س) و س]

= [(١ - جا^٢س) و س = س + $\frac{1}{4}$ جتا^٢س + ث]

[١١] جتا^٢س جاس و س

= - [جتا^٢س (- جاس) و س = - $\frac{1}{4}$ جتا^٢س + ث]

[١٢] جا^٢س جتا^٢س و س = $\frac{1}{4}$ جا^٢س + ث

[١٣] س^٢ جتا^٢ (س٣ + ٥) و س :

نفرض أن ص = س٣ + ٥ \therefore و ص = ٣ س^٢ و س

\therefore المقدار = $\frac{1}{3}$ [س^٢ جتا^٢ (س٣ + ٥) \times ٣ س^٢ و س]

= $\frac{1}{3}$ [جتا^٢س و ص = $\frac{1}{3}$ جاس + ث]

= $\frac{1}{3}$ جا^٢ (س٣ + ٥) + ث

[١٤] [(٣ + جاس) جتا^٢س و س :

نفرض أن ص = ٣ + جاس \therefore و ص = جتا^٢س و س

\therefore المقدار = [ص^٢ و ص = $\frac{1}{4}$ ص^٢ + ث]

= $\frac{1}{4}$ (٣ + جاس) + ث

[١٥] قاس^٢س ظاس و س

= [قاس^٢س (قاس^٢س) و س = $\frac{1}{9}$ قاس^٢س + ث]

[١٦] جتا^٢س - ٤ و س

= [(جتاس - ٤ قاس) و س = جاس - ٤ ظاس + ث]

[١٧] [(جتاس + جتا^٢س) و س]

= [($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ جتا^٢س + جتا^٢س) و س]

= $\frac{1}{4}$ س + $\frac{1}{4}$ جا^٢س + جاس + ث

[١٨] [(جتاس + قاس) و س]

= [(جتاس + ٢ جتا^٢س قاس + قاس^٢س) و س]

= [($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ جتا^٢س + ٢ + قاس^٢س) و س]

= [($\frac{5}{4}$ + $\frac{1}{4}$ جتا^٢س + قاس^٢س) و س]

= $\frac{5}{4}$ س + $\frac{1}{4}$ جا^٢س + ظاس + ث

تمارين (٤ - ٣) من الكتاب المدرسي

$$+ \int_{r-}^r d(s) s = \int_{r-}^r d(s) s. \quad [1]$$

$$\therefore \int_3^6 f(x) dx = 16 - 12 = 4$$

■ [٢] ∴ |س| زوجية ∴.

$$\xi = \left[\frac{\xi_s}{\xi} \right] \quad \xi = s | s | s \quad \xi = s | s | s$$

$$(1 - \lambda_1) \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\xi} s^2 = s^2 s^2 \right]_{\lambda=1} \quad \boxed{3}$$

$$c_0 \equiv \frac{\lambda_0}{\xi} =$$

$$^2_1[s^2 - ^2s] = s(2 - ^2s)^2 \quad [4] \blacksquare$$

$$22 \equiv (2 - 1) - (7 - 27) =$$

$$\left[\frac{2}{3} (1 + s^2) \right] \quad [5]$$

$$\epsilon_{\lambda, \gamma} = \left[1 - \frac{0}{1} \right] \frac{1}{0} = \left[\frac{0}{1} (1 + \infty) \right] \frac{1}{1} \times \frac{5}{0} =$$

$$v_s = \frac{1}{v - \lambda \sqrt{r}} \cdot \int_1^r = \frac{v_s}{v - \lambda \sqrt{r}} \cdot \int_1^r \quad [7]$$

$$(\bar{z}V - \lambda V) r_- = \begin{bmatrix} \overline{z - \lambda} V \end{bmatrix} r_- =$$

$$(1 - \sqrt{2})^2 = (1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$\left[\frac{1}{2} (3 - s) \right] = s \left[\frac{1}{2} (1 - s) \right] \quad [Y]$$

$$\left[\begin{pmatrix} r \\ 1-s \end{pmatrix} \right] \frac{1}{r} = \left[\frac{1}{r} \times \begin{pmatrix} r \\ 1-s \end{pmatrix} \right] \frac{1}{r} = s \quad s \quad s \quad s \quad x$$

$$\frac{18}{3} = (1 + 27) \frac{1}{9} =$$

بوضع \boxed{A} $ص = س^2 + 1 \therefore ص = س^3 + س$

عندما س ← ٠ ∴ ص ← ١ ، س ← ٢ ∴ ص = ٩

عندما $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots$ \therefore

$$\varepsilon, \varepsilon^* = (1 - \sqrt{V}) \frac{1}{\varepsilon} = \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \right] \frac{1}{\varepsilon} \times \frac{1}{\sqrt{V}} =$$

[۱۹] [ظا^۱س + ۲ جا^۲س) و س

$$= \{ (s^1 - s - 1 + 1 - \text{جنا}^2 s) s \}$$

$$= \{ (f, s) - (g, s) \}$$

$$= \text{ظاس} - \frac{1}{2} \text{جا ۲ س + ث}$$

■ [۲۰] ص = (۷ - جا ۲ س) س

$\frac{1}{2} + s = 2$ جتا $s + t$ ، عند $(0, 0)$:

$$\therefore \frac{9}{6} = 3 \therefore 3 + \frac{1}{6} + 0 = 0 \therefore$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س} ۷ + \frac{۱}{۲} \text{ جتا } \text{س} ۲ + \frac{۹}{۲}$$

أى: ٢ ص = ١٤ س + جتا ٢ س + ٩

$$\therefore \frac{\text{وص} = \frac{1}{2} + \frac{\text{س}^2}{\text{س}}}{\text{س}} \quad [21]$$

$$\therefore \text{ص} = \left(\text{س}^2 + \frac{1}{2} \text{قا}^2 \right) \frac{\text{س}}{2}$$

ص = س + ظا $\frac{س}{\epsilon} + \theta$ ، عند $(9 + \frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon})$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \therefore \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \therefore$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^2 + \text{ظا} + \frac{\text{س}}{2} + 8$$

[۲۲] $\frac{\text{وض}}{\text{وس}} = ۲ - \text{چتنا؟ س} \therefore$

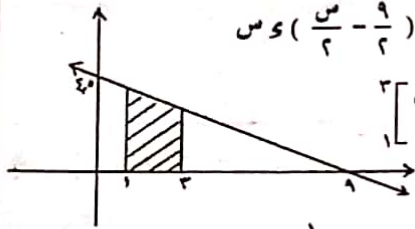
$$ص = [p - p_{\text{قتا}}] \times S_y = p_{\text{ظتا}} \times S_y + \text{ث}$$

عند $(0, \frac{\pi}{2})$: $\therefore p \equiv 0$ طالما $t + \frac{\pi}{2}$

∴ ث = ۵ - ۲ ∴ ص = ۲ - ۵ + ۵ = ۲

$\therefore p = 0 + \frac{\pi^2}{2}$ ظنا $p \approx 1 \therefore (1, \frac{\pi^2}{2})$ عند

$$1 = p - 0 + p - 1 \therefore p = p \therefore \text{ص} = 2 \text{ ظنا س} + 3$$



$$[12] \quad \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{9}{x} \right) dx = 2$$

$$\int_1^2 \left[\frac{4}{x} - \frac{9}{x} \right] dx =$$

$$\left[\left(\frac{4}{x} - 9 \right) - \left(\frac{4}{x} - 27 \right) \right] \frac{1}{x} =$$

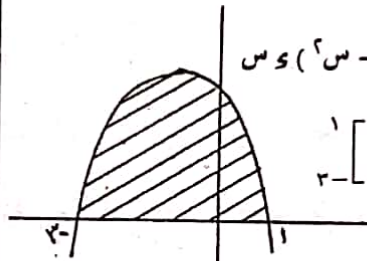
$$7 = \left(\frac{17}{x} - \frac{45}{x} \right) \frac{1}{x} =$$

$$[13] \quad \int_1^2 \sqrt{x+4} dx = 2$$

$$\int_1^2 \left[\frac{2}{3} (x+4)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{2} (x+4)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{38}{3} = 8 \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} (9) \frac{2}{3} =$$

[14]



$$\int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2$$

$$\int_{-1}^3 [-x^2 + 2x + 3] =$$

$$-(\frac{1}{3} - 1 - 3) =$$

$$10 \frac{2}{3} = (9 + 9 - 9 -)$$

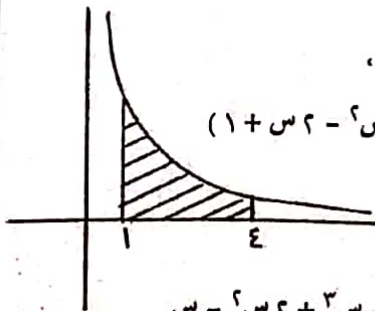
$$[15] \quad \int_1^4 \frac{4}{x^2} dx = 2$$

$$4 = \left[-\frac{4}{x} \right]_1^4 = 3 = (1 + \frac{1}{4} -)$$

[16] بوضع ص = 0

$$\therefore 3 = x, 1 = x$$

$$d(x) = (3 - x)(x^2 - 2x + 1)$$



$$3 = x^3 - 2x^2 + x - 3 = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$\therefore 3 + x^3 - 2x^2 + x - 3 =$$

$$2 = \int_1^3 (x^3 - 2x^2 + x - 3) dx$$

$$\int_1^3 \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 3x \right] =$$

$$[4] \quad \int_1^4 \left[\frac{1}{x} - \frac{16}{x} \right] dx = 4 \times \frac{1}{x} - 16 \times \frac{1}{x} =$$

= 6 وحدات مربعة

$$[5] \quad \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (x - 4) \right] dx = 2$$

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{x} - x + 4 \right] dx = 2$$

$$9 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 4 \right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 4 \right) =$$

$$[6] \quad \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (x - 4) \right] dx = 2$$

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{x} - x + 4 \right] dx =$$

$$4 = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 4 \right] = 2$$

$$4 = \left(\frac{1}{x} - 4 \right) = 16 \frac{1}{3} =$$

$$[7] \quad \int_1^2 (x - x^2) dx =$$

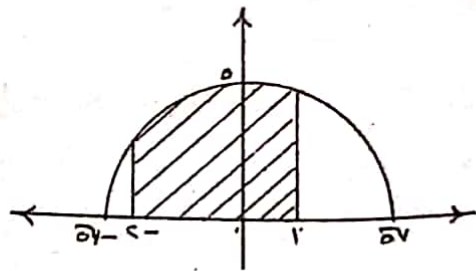
$$[8] \quad \int_1^2 (x - x^2) dx =$$

$$[9] \quad \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \right] dx = 2$$

$$[10] \quad \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \right] dx = 2$$

= 4 وحدة مربعة

[11]

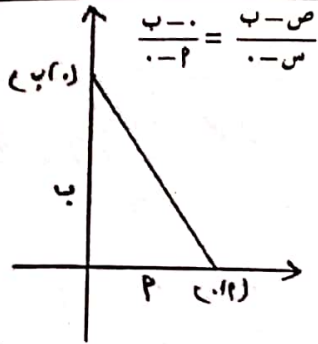


$$\therefore \text{بوضع } x = 0$$

$$\int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2$$

$$12 = \left(\frac{1}{x} + 10 - \right) - \left(\frac{1}{x} - 5 \right) =$$

$$9 = \left(\frac{2}{3} + 4 - 1\right) - \left(\frac{16}{3} - 8 + 4\right) =$$



[١٩] معادلة ب: $\frac{ب-0}{0-4} = \frac{ب-ص}{ص-0}$

ص - ب = $\frac{ب}{4}$ ص

∴ ص - ب = $\frac{ب}{4}$ ص

∴ $\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

$\frac{ب}{4} = \frac{ب}{4} - ب = 2 \times \frac{ب}{4} - ب =$

[٢٠] $\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

$\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

$\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

$\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

$\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

$\left[\frac{ب}{4} - ب\right] = \frac{ب}{4} \times \frac{ب}{4} - ب =$

تمارين (٥ - ٤) من الكتاب المدرسي

[١] عند ص = ٠ فإن ص = ٠

∴ $\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

[٢] $\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

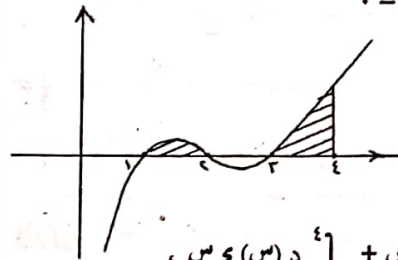
[٣] $\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$$+ \frac{٧}{٢} - \frac{٥}{٣} + \frac{١}{٤} - \left(9 + \frac{٦٣}{٢} - \frac{٦٢٥}{٣} + \frac{٨١}{٤}\right) =$$

(٣) = ٢,٢٥ وحدة مربعة

[١٧] بوضع ص = ٠



∴ ص = ١

٢ = ص

٣ = ص

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

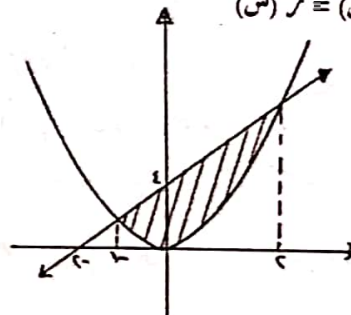
$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

[١٨] بوضع د (ص) = ص (س)



∴ $\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$\pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi = \left[\frac{٢}{٢}\right] \pi =$

$$\pi \frac{17}{0} = 32 \times \frac{3}{0} \times \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \text{ح} \quad [13] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 36 = \text{وحدة مكعبة}$$

$$[14] \quad \text{أولاً: الدوران حول محور السينات:}$$

$$\text{بوضع ص} = 0 \quad \therefore \text{س} = 4 \quad \therefore \pi = \text{ح} \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = (8 - 16) \pi = \text{ب وحدة مكعبة}$$

$$\text{ثانياً: الدوران حول محور الصادات:}$$

$$\text{عند س} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 2 \quad \therefore \pi = \text{ح}$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 2 = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 2 = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi \frac{012}{10} = \text{وحدة مكعبة}$$

$$\pi = \text{ح} \quad [15] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$+ \frac{1}{3} + 0 - 20 - (4 + \frac{74}{3} + 80 - 4 \times 20) \pi =$$

$$\pi 9 = (16) \text{ وحدة مكعبة}$$

$$[16] \quad \text{معادلة ب:}$$



$$\frac{0-0}{2+1} = \frac{0-0}{2+1}$$

$$\frac{0-0}{2-1} = \frac{0-0}{2-1}$$

$$\pi [4] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$= \text{حجم كرة طول نصف قطرها 2 وحدة}$$

$$\pi = \text{ح} \quad [5] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 9 = \text{وحدة مكعبة}$$

$$[6] \quad \text{عند ص} = 0 \quad \therefore \text{س} = 3 \quad \therefore \pi = \text{ح}$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 9 = \text{وحدة مكعبة}$$

$$\pi = \text{ح} \quad [7] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \text{ح} \quad [8] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 24 = \left(\frac{8}{3} + \frac{74}{3} \right) \pi = \text{وحدة مكعبة}$$

$$[9] \quad \text{عند س} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 0 \quad \therefore \pi = \text{ح}$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \text{ح} \quad [10] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 32 = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$[11] \quad \text{عند س} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 4 \quad \therefore \pi = \text{ح}$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi 8 = \text{وحدة مكعبة}$$

$$\pi = \text{ح} \quad [12] \quad \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi = \left[\frac{3}{0} \text{ ص } \frac{0}{2} \right] \pi =$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

$$\pi = \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi) + \frac{1}{3} (1 - \pi)$$

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الرابعة

$$[1] \text{ د (س) } = \text{س}^3 - \text{س} + \text{ث} \therefore \text{د (2)} = 3 \Leftarrow$$

$$8 - 10 + \text{ث} = 3 \therefore \text{ث} = 5$$

$$\therefore \text{د (س)} = \text{س}^3 - \text{س} + 5$$

$$\therefore \text{د (-2)} = 7 = 5 + 10 + 8$$

$$[2] \text{ ص } = \left[\left(\frac{1}{\text{س}} + \text{س} \right) \right] \text{ و } \frac{1}{\text{س}} = \text{س} + \frac{1}{\text{س}} + \text{لو ه س} +$$

$$\text{ث} , \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} + 0 + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = 0$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{\text{س}} + \text{س} + \text{لو ه س} , \text{عندما س} = \text{ه}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{\text{س}} + \text{س} + \text{لو ه س} = \frac{1}{\text{ه}} + \text{ه} + 1$$

$$[3] = \left[(1 + \text{ق}^3 \text{س}) \right] \text{ و } \text{س} = \text{س} + \text{ظا} + \text{ث}$$

$$[4] \text{ } \left[\text{ }^{\circ} \text{د (3) (س)} - 1 \right] \text{ و } \text{س} = 3 \text{ } \left[\text{ }^{\circ} \text{د (س)} \right] \text{ و } \text{س}$$

$$- \text{ } \left[\text{ }^{\circ} \text{و } \text{س} = 3 \times 4 - (5 - 2) = 9 \right]$$

$$[5] \text{ } \pi = \text{ح} \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] \pi + \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] \pi =$$

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \right) \pi = \left[\left(\frac{1}{5} \text{ }^{\circ} \text{س} \right) \right] \pi + \left[\left(\frac{1}{5} \text{ }^{\circ} \text{س} \right) \right] \pi =$$

$$\pi \frac{6}{5} =$$

$$[6] \text{ و } \text{ص} = 6 \text{ س و } \text{س}$$

$$[7] \text{ و } \text{ص} = \frac{5}{2} (3 + \text{س}^2) =$$

$$\therefore \text{و } \text{ص} = \frac{5}{2} (3 + \text{س}^2) = \frac{5}{2} \times 1 \times (3 + \text{س}^2) =$$

$$= \frac{5}{2} (3 + \text{س}^2) =$$

$$[8] \text{ و } \text{ص} = 3 (1 + \text{س}) \left(\frac{1}{\text{س}} + 1 \right) \text{ و } \text{س} =$$

$$[9] \text{ و } \text{ص} = 5 - 5 - 5 =$$

$$[10] \text{ و } \text{ص} = (3 + \text{س}^2) \text{ ه } \text{س}^3 + \text{س}^2 \text{ و } \text{س}$$

$$[11] \text{ و } \text{ص} = -2 \text{ جا } 2 \text{ س ه جتا } 2 \text{ س و } \text{س}$$

$$[12] \text{ و } \text{ع} = \frac{\text{س}^2}{1 + \text{س}^2} =$$

$$[13] \text{ و } \text{ع} = 2 (1 + \text{لو ه س}) \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{2}{10} (1 + \text{لو ه س}) =$$

$$[14] \text{ و } \text{ع} = \frac{1}{\text{ظا} (1 - \text{س}^3)} - \frac{1}{\text{ظا} (1 - \text{س}^3)} =$$

$$= \frac{1}{\text{ظا} (1 - \text{س}^3)} - \frac{1}{\text{ظا} (1 - \text{س}^3)} =$$

$$[15] \text{ } \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] + \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] =$$

$$= \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] =$$

$$[16] \text{ } \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] + \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] =$$

$$= \left[\text{ }^{\circ} \text{س}^3 \text{و } \text{س} \right] =$$

$$[17] \text{ } \left[\text{ }^{\circ} \text{ك و } \text{س} \right] + \left[\text{ }^{\circ} \text{ك و } \text{س} \right] = \left[\text{ }^{\circ} \text{ك و } \text{س} \right]$$

[۳۰] □ قاس^۳ س (قاس ظاس) و س ،

بفرض أن ص = قاس ∴ و ص = قاس ظاس و س

∴ المقدار = [ص^۳ و ص = $\frac{1}{4}$ ص^۴ + ث

$\frac{1}{4}$ قاس^۴ س + ث

[۳۱] □ س^۳ ه س^۲ + س^۳ و س : نفرض أن ص = ه س^۲ + س^۲ + ۳

∴ و ص = س^۲ ه س^۲ + س^۲ و س

∴ و ص = س^۲ و س ∴ و س = $\frac{و ص}{س س^۲}$

المقدار = [س ص × $\frac{و ص}{س س^۲}$] = $\frac{و ص}{س س^۲}$ و $\frac{1}{4}$ ص = $\frac{1}{4}$ و ص + ث

$\frac{1}{4}$ ه س^۲ + س^۲ + ث

[۳۲] □ نفرض ص = ه س^۲ + س^۲ ∴

و ص = (ه س^۲ + س^۲) و س = ۲ (ه س^۲ + س^۲) و س

∴ و س = $\frac{و ص}{(ه س^۲ + س^۲) ۲}$

∴ المقدار = [$\frac{و ص}{(ه س^۲ + س^۲) ۲} \times \frac{ه س^۲ + س^۲}{و ص}$]

$\frac{1}{4}$ و ص = $\frac{1}{4}$ و ص = $\frac{1}{4}$ و ص + ث

$\frac{1}{4}$ و ص = $\frac{1}{4}$ و ص = $\frac{1}{4}$ و ص + ث

[۳۳] □ نفرض أن ص = س^۳ ∴ و ص = س^۳ و س ،

و ع = (س^۲ + س^۲) و س

∴ ع = $\frac{۲}{۳} (س + س^۲) \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} (س + س^۲) \times \frac{۱}{۳}$

∴ المقدار = س (س^۲ + س^۲) - $\frac{۲}{۳} (س + س^۲)$

و س (۱) ولكن [$\frac{۲}{۳} (س + س^۲)$] و س

$\frac{1}{4}$ و س = $\frac{۲}{۳} (س + س^۲) \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} (س + س^۲) \times \frac{۱}{۳}$

ث + ومن (۱) ∴ المقدار = س (س^۲ + س^۲) - $\frac{۲}{۳} (س + س^۲)$

$\frac{1}{4}$ و س = $\frac{۲}{۳} (س + س^۲)$ + ث

= $\frac{۲}{۳} (س + س^۲) - \frac{1}{4} (س + س^۲)$

= $\frac{۲}{۳} (س + س^۲) - \frac{۱}{۴} (س + س^۲)$

= $\frac{۲}{۳} (س + س^۲) (۱ - \frac{۱}{۴})$

[۳۴] □ نفرض أن ص = لو ه س ∴ و ص = $\frac{1}{5}$ و س ،

و ع = س^۴ و س ∴ ع = $\frac{1}{5}$ و س

∴ المقدار = $\frac{1}{5}$ و س = $\frac{1}{5}$ و س = $\frac{1}{5}$ و س

= $\frac{1}{5}$ و س = $\frac{1}{5}$ و س = $\frac{1}{5}$ و س + ث

= $\frac{1}{5}$ و س = $\frac{1}{5}$ و س = $\frac{1}{5}$ و س + ث

[۳۵] □ نفرض ص = س^۴ ∴ و ص = س^۴ و س ،

و ع = ه س^۲ ∴ ع = ه س^۲ و س

∴ المقدار = س^۲ ه س^۲ - س^۲ ه س^۲ و س

= س^۲ ه س^۲ - س^۲ ه س^۲ + ث = س^۲ ه س^۲ (۱ - س^۲) + ث

[۳۶] □ بوضع ص_۱ = ۷ + س^۲ - س^۲ = ص_۲

= (س - ۱) ∴ نقط التقاطع هي (۴، ۱)، (۱، ۴)

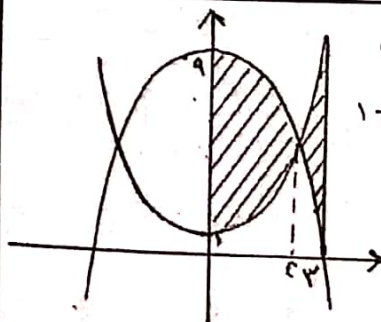
∴ م = $\int_{-۱}^۲ (ص_۱ - ص_۲) و س$

= $\int_{-۱}^۲ (۷ + س - س - س + ۷) و س$

= $\int_{-۱}^۲ (۶ + س - س) و س$

= $\int_{-۱}^۲ (۱۸ + ۱۸ + ۱۸ -) و س = \frac{۲}{۳} [۶ + س + س^۲]$

= $\frac{۲}{۳} (۶ - ۲ + \frac{۲}{۳})$ - وحدة مربعة



[۳۷] □ ص_۱ = ص_۲

∴ ۹ - س^۲ = س^۲ + ۱

∴ نقط التقاطع هي

س = ۲، ۱

س = ۲ - مرفوض

∴ م = م_۱ + م_۲ = $\int_{-۱}^۲ [(۱ + س^۲) - (س^۲ - ۹)] و س$

$$\left. s(1 - 1 + 1^2 - 1^3 + 1^4 - 1^5 + \dots) \right|_{\frac{1}{2}} \pi = \tau \therefore$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{3} (3 + 2 + 1) \right\}$$

$$\frac{1}{3} \left[-\text{مس}^1 + 2\text{لوه} - \text{مس}^2 \right] \pi =$$

$$(1 - \sqrt{2})^2 (1 - \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) \times (1 + \sqrt{2}) \mid \pi =$$

$${}^3\text{لو} ٢ = {}^3\text{لو} ٢ + ٤ + ٤ - =$$

$$\sqrt[n]{V} = \sqrt[n]{V_s} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{V_s}} = \sqrt[n]{V_s} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{V_s}}$$

عند $(2, 2)$: ميل المماس $= \frac{1}{2}$

∴ معادلة المماس هي : $ص - ٢ = \frac{١}{٢} (س - ٢)$

ای ۲ ص - ۴ = س - ۲ ای : ۲ ص = س + ۲

$$1 + \frac{3}{2} = 2.5 \therefore$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \pi + s \left[f(\cdot, v) - f(\cdot, v) \right] \pi = \tau$$

$$|(\sqrt{s}) - (1 + \frac{s}{r})| \leq \pi = s(1 + \frac{s}{r})$$

$$s(1+s+\frac{s}{i}) \Big|_{s=0}^{\infty} = \pi + s$$

$$+ \left(\frac{1}{4} s^4 + s^3 + s^2 - 1 \right) s^2 \pi =$$

$$-\left[s + s^2 \frac{1}{6} + s^3 \frac{1}{12}\right] \pi$$

$$+ s s (1 + s - \frac{1}{2} s) \Big] \pi =$$

$$r_- \left[s + r_s \frac{1}{r} + r_s \frac{1}{14} \right] \pi$$

$$+ \left[s + \frac{1}{r} - \frac{1}{1r} \right] \pi =$$

$$r_2 = \left[s + s \frac{1}{r} + s \frac{1}{12} \right] T$$

$$\pi \frac{r}{r} + \dots - (r + \epsilon \times \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\frac{1}{r}}) \pi$$

$$\pi \frac{z}{r} = \pi \frac{r}{r} + \pi \frac{r}{r}$$

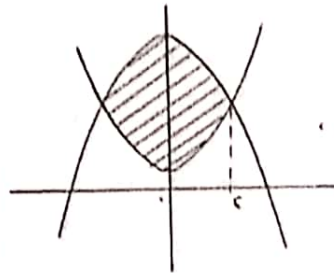
$$S_2 = \left[(s_1 - 9) - (1 + s_1) \right]^2 + s_1$$

$$r \left[s\lambda - r s \frac{r}{r} \right] + r \left[r s \frac{r}{r} - s\lambda \right] =$$

$$-(22 - 27 \times \frac{2}{3}) + \dots - (8 \times \frac{2}{3} - 17) =$$

$$\frac{17}{3} = (17 - 1 \times \frac{1}{2}) \text{ وحدة مربعة}$$

[۳۸] ص، ۹ = س؟



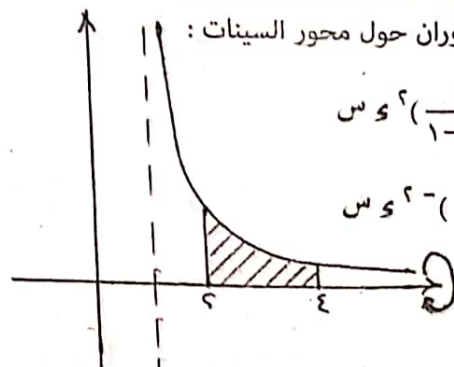
$$[(1 + s) - (s - 9)]^2 = 2 \therefore$$

$$\frac{32}{3} = \left[3m \frac{2}{3} - m \right] = m$$

٣٩] (٩) الدوران حول محور السينات :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-s} \right)^4 \pi = 2$$

$$\pi = \int_0^1 (1-s)^2 s^2 ds$$



$$(1 - \frac{1}{3})\pi = \frac{2}{3}[1 - (1 - \sigma)]\pi =$$

$\pi =$ وحدة مكعبة

(٢) الدوران حول محور الصادات :

$$\frac{1}{1-s} = \text{ص} \text{ ولكن } s \text{ (} s_1 - s_2 \text{)} \pi = 2$$

$$\therefore 1 - s = \frac{1}{s} \quad \therefore \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{s}$$

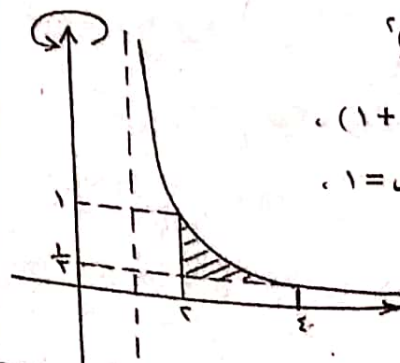
$$2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = ?$$

$$= (-\text{ص}^2 + \text{ص} - 1)$$

فندما س = ۲ فإن ص = ۱ ،

فندما س = ۴ فان

مس = ۱۰۰



اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة
الرابعة

[١] ■ $٤ + ٢٣٥ + ٣$

[٢] ■ لوهر | هـ س - ٣ | + ٣

[٣] ■ د (س) = $\begin{cases} -٢ \leq س \\ ٢ < س \end{cases}$

∴ $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] د (س) و س = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] (س - ٢) و س$
 $٢ = ٢ - ٤ = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] س - \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] س =$

[٤] ■ مساحة نصف دائرة طول نصف قطرها ٢ وحدة
 $\pi ٢ = \left(\frac{٢}{٢} \right) \pi ٢ =$

[٥] ■ $٤ = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] د (س) و س - \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] س و س +$
 $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] ٣ و س = ٧ - ٥ \times ٤ = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] [٣ س] +$
 $١٩ = (٦ - ٩) + ١٣ =$

[٦] ■ $\pi = ح \left[\begin{matrix} ٤ \\ ٤ \end{matrix} \right] \pi ٤ = س و س \left(\frac{٤}{٤} \right) \left[\begin{matrix} ٤ \\ ٤ \end{matrix} \right] (س - ٢)$
 $\pi ٣ = (١ + \frac{١}{٤} -) \pi ٤ = \left[\begin{matrix} ٤ \\ ٤ \end{matrix} \right] [١ - س -] \pi ٤ = س و س$

[٧] ■ (٩) نفرض أن $ص = س + ٦$
 $∴ و س = ٢ (س + ٣) و س$
 $∴ و س = \frac{١}{(٣ + س) ٢} و س$

∴ المقدار $\left[\begin{matrix} (٣ + س) \\ (٣ + س) ٢ \end{matrix} \right] \times \frac{١}{ص} =$

$\left[\begin{matrix} ١ \\ ص \sqrt{٢} \end{matrix} \right] و س = ما ص + ٣ = \sqrt{٦ + س} + ٣$

(ب) نفرض أن $ص = س - ٣ ∴ س = ص + ٣$
 $∴ و س = و س$

∴ المقدار $\left[\begin{matrix} (٣ + ص) \\ (٣ + ص) ٢ \end{matrix} \right] \times \frac{١}{ص} و س =$

$\left[\begin{matrix} (ص + ٦ + ٩) \\ (ص + ٦ + ٩) ٢ \end{matrix} \right] و س =$

$\left[\begin{matrix} (ص + ٦ + ٩) \\ (ص + ٦ + ٩) ٢ \end{matrix} \right] و س =$

$\frac{٢}{٧} و س + \frac{١٢}{٥} و س + \frac{٢}{٢} و س + ٣ =$

$\frac{٢}{٣٥} و س = (٥ و س + ٤٢ و س + ١٠٥) =$

$\frac{٢}{٣٥} (س - ٣) \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] (س - ٣) + (٣ - س) ٤٢ + (٣ - س) ١٠٥ =$

$\frac{٢}{٣٥} (س - ٣) \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] (س - ٣) + (٣ - س) ١٢ + (٣ - س) ١٠٥ = ١٠٥$

[٨] ■ د (س) = $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] (س - ٣) + ٣ و س + ٦ و س + ١ - س$

$\frac{١}{٢} س + ٢ س + \frac{٣}{٢} س - س + ٣ =$

∴ د (٢ -) = ١

∴ $\frac{١}{٢} (٢ -) + ٢ (٢ -) + \frac{٣}{٢} (٢ -) - (٢ -) + ٣ = ١$

∴ ٣ = ١

∴ د (س) = $\frac{١}{٢} س + ٢ س + \frac{٣}{٢} س - س + ٣ =$

∴ د (٣) = $\frac{١}{٢} (٣) + ٢ (٣) + \frac{٣}{٢} (٣) - (٣) + ٣ = ١٠٦$

[٩] ■ (٩) $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right] (قاس) = ظاس قاس و س$

$\frac{١}{٣} قاس + ٣ =$

(ب) $\left[\begin{matrix} (١ + جاس) \\ (١ + جاس) ٢ \end{matrix} \right] جتاس و س =$

∴ المقدار $\frac{٢}{٣} (١ + جاس) + ٣ =$

$\frac{٢}{٣} \sqrt{(١ + جاس) ٣} + ٣ =$

[١٠] ■ (٩) نفرض أن $ص = لوهر س$

∴ $\frac{٢}{٣} و س = ع و س$ ، $ع = س$ ∴ $\frac{١}{٣} س = ع$

∴ المقدار $\frac{١}{٣} س = لوهر س = \frac{٢}{٣} س و س$

$\frac{١}{٣} س = لوهر س - \frac{٢}{٩} س + ٣ =$

$\frac{١}{٩} س (٣ - لوهر س - ٢) + ٣ =$

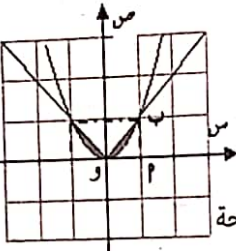
(ب) $\frac{١}{٤} = \left[\begin{matrix} ٤ س هـ س - ١ و س = \frac{١}{٤} هـ س - ١ + ٣ \end{matrix} \right]$

حلول اختبارات كتاب لامي على الوحدة الرابعة

الإختبار الأول

السؤال الأول:

(P):



$$ح = 2 \times م (\Delta و P) = 2 \times 1 = 2$$

$$ح = 2 \times 1 \times 1 = 2 \text{ وحدة مساحة}$$

$$ح = \text{مساحة المنطقة تحت المنحنى ص} = 2$$

$$\text{بين } ص = 0, س = 1 \Rightarrow ح = 2 = \int_0^1 2س \, دس$$

$$ح = \int_0^1 2س \, دس = \left[س^2 \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \text{المساحة} = ح - ح = 1 - 0 = 1 \text{ وحدة مساحة}$$

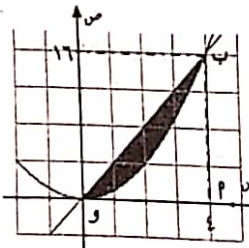
(P): بوضع $س = 4$

$$\therefore س = 0, س = 4$$

الحجم $ح =$ حجم المنطقة

المثلثية و $P =$ حجم

المنطقة تحت المنحنى $ص = 4س$



$$ح = \int_0^4 4س \, دس = \left[2س^2 \right]_0^4 = 32 - 0 = 32$$

$$\pi = \int_0^4 4س \, دس = \left[2س^2 \right]_0^4 = 32 - 0 = 32$$

$$ح = 32 - 0 = 32 \text{ وحدة حجم}$$

$$ح = \int_0^4 4س \, دس = \left[2س^2 \right]_0^4 = 32 - 0 = 32$$

$$\pi = \int_0^4 4س \, دس = \left[2س^2 \right]_0^4 = 32 - 0 = 32$$

$$\therefore ح = 32 - 0 = 32 \text{ وحدة مكعبة}$$

وحدة مكعبة

السؤال الثاني:

(P):

$$(1) ص = \frac{1}{س} + 2 \text{ لوهر } س. \frac{1}{س} = \frac{1}{س} (1 + \text{لوهر } س)$$

(P) صفر لأنها دالة زوجية

$$ح = \int_{-1}^1 (س^2 - 3س) \, دس = \left[\frac{س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$ح = \int_{-1}^1 (س^3 - 2س^2 + س) \, دس = \left[\frac{س^4}{4} - \frac{2س^3}{3} + \frac{س^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$ح = 0 \times 2 = (16 \times \frac{1}{4} - 8) = 0 \text{ صفر}$$

$$[12] \text{ المقدار } = \int_0^1 (س^2 - 3س) \, دس = \left[\frac{س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - 0 = -\frac{7}{6}$$

$$[13] \text{ } \int_0^1 (س^2 - 3س) \, دس = \left[\frac{س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - 0 = -\frac{7}{6}$$

$$13 - (10 - 25) = 20$$

$$[13] \text{ } \int_0^1 (س^2 - 3س) \, دس = \left[\frac{س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - 0 = -\frac{7}{6}$$

$$16 \times \frac{1}{4} = \left[\frac{س^4}{4} - \frac{2س^3}{3} + \frac{س^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 = 0$$

وحدات مربعة

$$[14] \text{ بوضع } ص = \sqrt{س} = س^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{س} = س^{-1}$$

\therefore نقط تقاطع المنحنيين هما $(0,0), (4,2)$

$$(1) \int_0^4 (س^{\frac{1}{2}} - س^{-1}) \, دس = \left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$[15] \text{ } \int_0^4 (س^{\frac{1}{2}} - س^{-1}) \, دس = \left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$\left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$\frac{28}{3} = 8 \times \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times (4) = \frac{28}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

$$(2) \text{ ح = بب } \int_0^4 (س^{\frac{1}{2}} - س^{-1}) \, دس = \left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$\pi = \int_0^4 (س^{\frac{1}{2}} - س^{-1}) \, دس = \left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$\pi = \int_0^4 (س^{\frac{1}{2}} - س^{-1}) \, دس = \left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$\pi = \int_0^4 (س^{\frac{1}{2}} - س^{-1}) \, دس = \left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + س \right]_0^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{28}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\text{لوم} + 3 \text{ جاس} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} [\text{لوه} (1 \times 3 + 2) - \text{لوه} (2 \times 3 + 2)]$$

$$\frac{5}{2} \text{ لو} \frac{1}{3} = (2 \text{ لو} - 5 \text{ لو}) \frac{1}{3} =$$

(2) المقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) dx$ ٣ ٤٣

س. ۵۳ = ۳ [طاس] = ۴۵ = ۳ (۱ - ۰) = ۳

$$(3) \text{ المقدار } = \left(\frac{\text{لومس}}{\text{س}} + \frac{2}{\text{س}} \right)^{2\sqrt{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{s} \sqrt{s} + \frac{1}{s} \sqrt{s} \right]_{\text{لوہ}} =$$

$$\sqrt{V} \left[\frac{1}{2} (\text{لوس}) \right] + \sqrt{V} [\text{لوس}] 2 =$$

$$[(1 - \sqrt{10}) - (10 - \sqrt{10})] + (1 - \sqrt{10})^2 =$$

$$\frac{9}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + 1 =$$

(۲) ص = ^{لوه} ۳ = ۳ = ص = ^{لوه} ۳ . لوه ۳

(۳) ص = س^۳ ⇔ ص^۳ = س^۱

: (4)

$$\frac{1}{1-[(3+s)u]} = s. \frac{1}{3+s} \quad (1)$$

$${}^2\text{لو} 3 = \frac{4}{2} \text{لو} 3 = ({}^2\text{لو} - {}^4\text{لو}) 3 =$$

$$(2) \quad 3 = [\text{قنا س ظنا س . س س}] + [\text{س . س}]$$

$$= 3 \text{ قتا س} + 2 \text{ س} + \text{ث}$$

$$\left\{ [s^2 + 2s] = s \cdot (2 + 3s) \right\} = (3)$$

$$9 = (7 + 1) - (2 + 8) =$$

حل الاختبار الثاني

السؤال الأول :

(٩) المساحة = $\frac{1}{3} \left[3^4 (3 + 4) \right] = \frac{1}{3} \cdot 3^4 \cdot 7 = 21 \cdot 3^3 = 21 \cdot 27 = 567$ م²

$$\left(\frac{r}{r} \xi - \frac{r}{r} 16\right) \frac{r}{9} = \frac{r}{9} \left[\frac{r}{r} (\xi + 53) \frac{r}{r} \right] \frac{1}{r} =$$

$$12 \frac{4}{9} = \frac{112}{9} =$$

(ب) $\text{ص} - \text{س} = \text{س} \Leftrightarrow \text{س} + \text{س} = \text{ص}$

$$s. (s-1)^{\wedge} \downarrow_{\pi} = s. s^{\wedge} \downarrow_{\pi} = \tau$$

$$-(32-74)\pi = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \pi =$$

$$\pi \wedge = [(\wedge - 32) \text{ وحدة مكعبة}]$$

السؤال الثاني :

: (P)

$$3 \times 2^2 \times 5 + 2 \times 3^2 \times 7 + 6 \times 5^2 \times 11 = \text{ٹ} \quad (1)$$

(۲) ص' = $\frac{1}{s}$ جا (لوہ س)

$$(3) \text{ ص} = 2 - \text{س قنا}^2 \text{ س}^2 = \frac{1}{\text{طبا س}^2} = \frac{2 - \text{س قنا}^2 \text{ س}^2}{\text{طبا س}^2}$$

: (५)

$$(1) \text{ د (س)} = 2 + 3 \text{ جاس} \Leftarrow \text{د (س)} = 3 \text{ جتاس}$$

لرأسب

في الرياضيات

المرحلة الثانوية

كتاب المسائل في الرياضيات البحتة - الجبر والهندسة الفراغية

كتاب المسائل في الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

كتاب المسائل في الرياضيات التطبيقية - الميكانيكا

كتاب الامتحانات في الرياضيات البحتة والتطبيقية

كتاب المسائل و الامتحانات في الرياضيات البحتة للقسم العلمي (الفصل الدراسي الاول)

كتاب المسائل و الامتحانات في الرياضيات البحتة للقسم العلمي (الفصل الدراسي الثاني)

كتاب المسائل و الامتحانات في تطبيقات الرياضيات للقسم العلمي

كتاب المسائل في الرياضيات (الفصل الدراسي الاول)

كتاب المسائل في الرياضيات (الفصل الدراسي الثاني)

الطبعة الأولى ١٩٨٥م - الطبعة الثانية ١٩٨٦م - الطبعة الثالثة ١٩٨٧م - الطبعة الرابعة ١٩٨٨م

مطبعة

المكتبة العامة للكتاب

الطبعة الأولى ١٩٨٥م - الطبعة الثانية ١٩٨٦م - الطبعة الثالثة ١٩٨٧م - الطبعة الرابعة ١٩٨٨م